n°89 p 171

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + 1$
$\mathcal{C}_g$ est la courbe représentative de g

1) g est dérivable sur $\mathbb{R}$. $g'(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

2) h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$
Remarque : $h(x) = g'(x)$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$. $h'(x) = -3x^2 + 6x - 3$

Pour connaître les variations de la fonction h, on étudie le signe de sa dérivée h'.
On remarque que $h'(x)$ peut se factoriser ainsi :
$h'(x) = -3(x^2 - 2x + 1)$
$h'(x) = -3(x-1)^2$.
Puisqu'un carré est toujours positif ou nul, on déduit que $h'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de h'		$-$	0	$-$	
variations de h	↘				

Donc la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3) Pour connaître le sens de variation de la fonction g, il faut connaître le signe de sa dérivée g', c'est à dire h.
- La fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Il existe une valeur particulière que nous appelerons x_0 qui annule $h(x)$. La calculatrice suggère que $x_0 = 1$
Calculons $h(1)$ pour vérifier.
$h(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ $\quad h(1) = -(1)^3 + 3(1)^2 - 3(1) + 1$
$h(1) = 0$

Donc nous pouvons déduire que :
- Si $x \in]-\infty ; 1[$ alors $h(x) > 0$
- Si $x = 1$ alors $h(x) = 0$
- Si $x \in]1 ; +\infty[$ alors $h(x) < 0$

Cela nous donne le signe de $g'(x) = h(x)$.
On en déduit le tableau de variation de la fonction g :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de g'		$+$	0	$-$	
variations de g		↗	$1,25$	↘	

4) La tangente à $\mathcal{C}_g$ est horizontale c'est à dire de coefficient directeur égal à 0 lorsque $g'(x) = 0$.
D'après ce qui précède, $g'(1) = 0$.
Donc la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1 est horizontale.

5) La tangente à $\mathcal{C}_g$ est parallèle à la droite d'équation $y = -5x + 3$ lorsque son coefficient directeur vaut -5, c'est à dire pour les valeurs de x telles que $g'(x) = -5$ ou encore $h(x) = -5$
- La fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- $h(2) = -1$ $\quad h(3) = -8$ Donc il existe $x_0 \in]2 ; 3[$ tel que $h(x_0) = -5$.