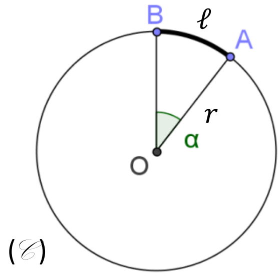
CHAPITRE 10 : Trigonométrie

1 Longueur d'un arc de cercle 2
2 Le radian 2
2.1 Définition 2
2.2 Conversion en degrés 3
3 Cercle trigonométrique 3
4 Sinus et cosinus d'un réel 4
4.1 Définitions 4
4.2 Valeurs remarquables de sinus, cosinus 4
5 Angle orienté de deux vecteurs 5
6 Mesure principale d'un angle orienté 6
6.1 Définition 6
6.2 Une méthode pour trouver la mesure principale d'un angle orienté 6
7 Propriétés des angles orientés 7
7.1 Vecteurs colinéaires 7
7.2 Vecteurs orthogonaux 7
7.3 Relation de Chasles 7
7.4 Conséquences de la relation de Chasles 8
8 Angles associés x ; $-x$; pi+x ; pi-x 8
9 Angles associés pi/2+x ; pi/2-x 8
10 Equations trigonométriques cos x = cos a et sin x = sin a 9
10.1 Equation cos x = cos a 9
10.2 Equation sin x = sin a 9

CHAPITRE 10 : Trigonométrie

1 Longueur d'un arc de cercle

Soit le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon r. Soit A et B deux points du cercle $(\mathscr{C})$.



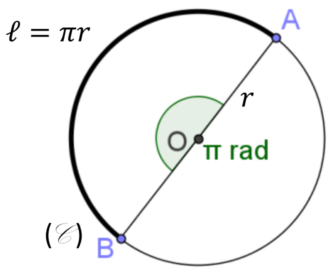
La longueur ℓ de l'arc $\widehat{AB}$ est :

$$\boxed{\ell = \alpha\, r}$$

où α est la mesure **en radians** de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

<u>Cas particulier :</u>

Si A et Bsont diamétralement opposés, alors $\ell = \pi\, r$. Ainsi, la mesure de l'angle plat $\widehat{AOB}$ est π rad.

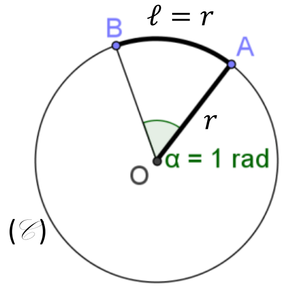


2 Le radian

2.1 Définition

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon r.

L'angle $\widehat{AOB}$ qui découpe sur le cercle un arc $\widehat{AB}$ de longueur égale au rayon du cercle a pour mesure **1 radian.**



2.2 Conversion en degrés

L'angle plat mesure π radians et aussi $180°$. La mesure d'un angle en radians est proportionnelle à sa mesure en degré.

Ainsi, on obtient le tableau des valeurs remarquables :

$\times\frac{180}{\pi}$

α en degrés	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$\mathbf{180°}$	$360°$
α en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\boldsymbol{\pi}$	2π

$\times\frac{\pi}{180}$

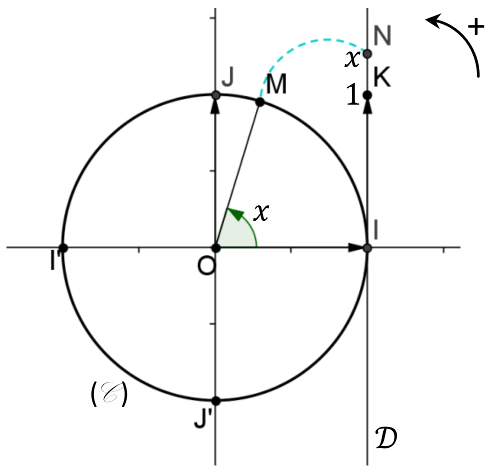
Exemple : Si $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ rad alors $\alpha = \frac{2\pi}{5} \times \frac{180}{\pi} = \frac{2\times180}{5} = 72°$

3 Cercle trigonométrique

<u>Définition :</u>

Soit $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan.

Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1 sur lequel on a choisi comme sens positif le sens contraire des aiguilles d'une montre est appelé **cercle trigonométrique**.



Le sens positif est le sens **direct**. L'autre sens est le sens négatif ou sens **indirect**.

Soit $\mathcal{D}$ la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ au point I et soit K le point de $\mathcal{D}$ de coordonnées $(1\,;1)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Par le procédé de l'enroulement de la droite $\mathcal{D}$, qui représente les nombres réels, autour du cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$:

- A tout point N de la droite $\mathcal{D}$ d'abscisse x dans le repère $(I;\overrightarrow{IK})$ on associe un point M du cercle $(\mathscr{C})$
- A tout point M de $(\mathscr{C})$ on associe une infinité de points de la droite $\mathcal{D}$ dont les abscisses dans le repère $(I;\overrightarrow{IK})$ sont $x,\ \ x+1\times2\pi,\ \ x+2\times2\pi,\ \ldots,\ \ x-1\times2\pi,\ \ x-2\times2\pi,\ldots$

<u>Propriété :</u>

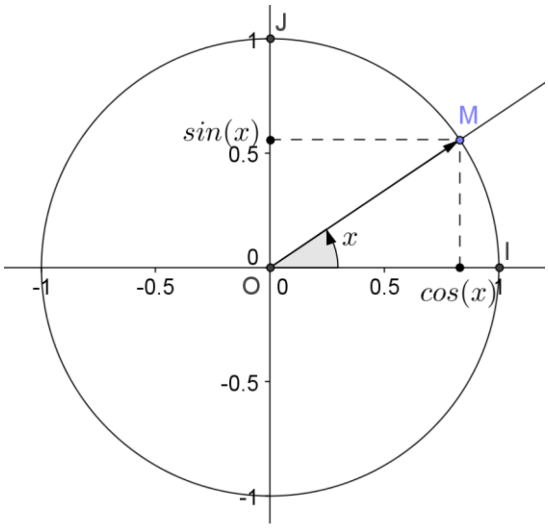
Soit x un réel et M le point du cercle $(\mathscr{C})$ associé au réel x. Le point M est associé à tous les réels de la forme $x+k\times2\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$.

4 Sinus et cosinus d'un réel

4.1 Définitions

Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique associé au réel x.

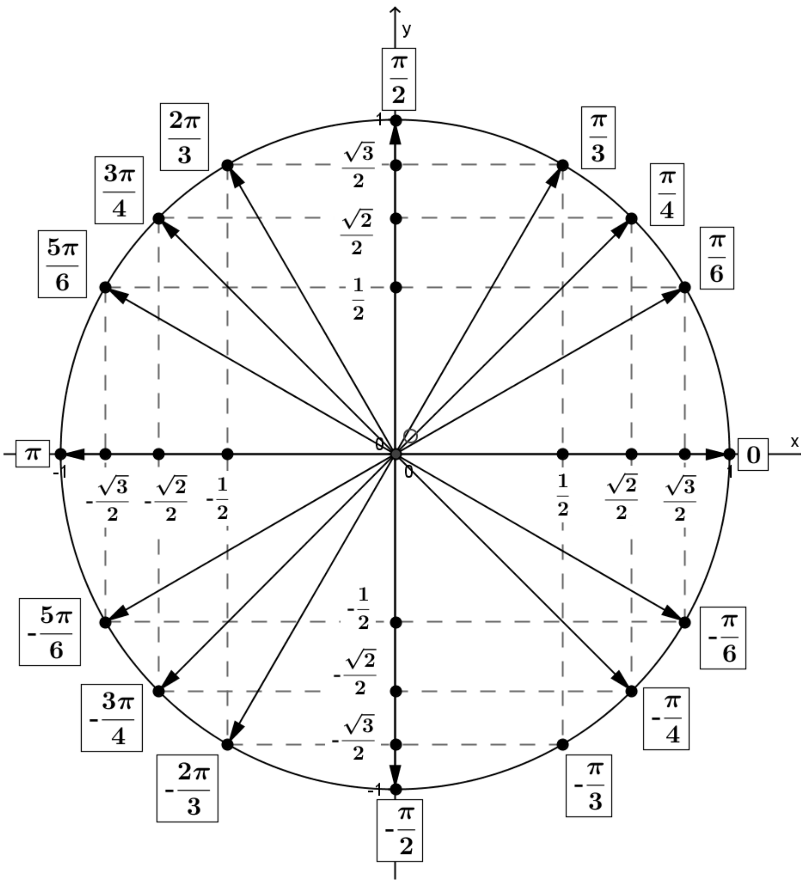
- On appelle **cosinus** du réel x **l'abscisse** du point M dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
- On appelle **sinus** du réel x **l'ordonnée** du point M dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.



<u>Propriétés</u>

- Pour tout réel x, $\cos(x) \in [-1\,;1]$ et $\sin(x) \in [-1\,;1]$.
- Pour tout réel x, $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

4.2 Valeurs remarquables de sinus, cosinus



Remarque :

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a :

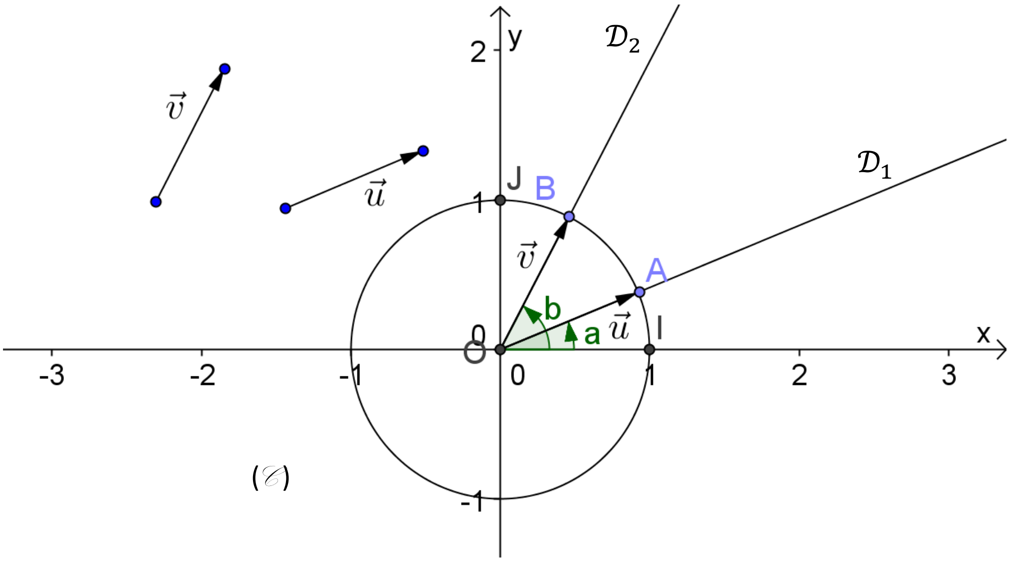
$$\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

D'où les valeurs remarquables :

x	**0**	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*non définie*

5 Angle orienté de deux vecteurs

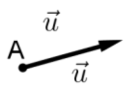
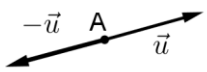
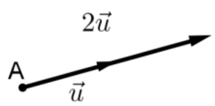
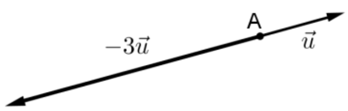
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non nuls** et $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les demi-droites d'origine O dirigées respectivement par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Soit A et B les points d'intersection des demi-droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ avec $(\mathscr{C})$.



L'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est le couple $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB})$.

Si a et b sont les réels associées aux points A et B par enroulement de la droite des réels autour du cercle, alors les mesures en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB})$ sont les réels $\boldsymbol{b-a}+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Angles orientés particuliers :

	$(\vec{u}\,;\vec{u})=0+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$
	$(\vec{u}\,;-\vec{u})=\pi+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$
	$Si\ \lambda>0, alors\ (\vec{u}\,;\lambda\vec{u})=0+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$
	$Si\ \lambda<0, alors\ (\vec{u}\,;\lambda\vec{u})=\pi+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$

6 Mesure principale d'un angle orienté

6.1 Définition

Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, celle qui se trouve dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ est la mesure principale.

Exemples

$\frac{3}{4}\pi$, $\frac{17}{18}\pi$ et $-\frac{5}{12}\pi$ sont des mesures principales car $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{17}{18}\pi$ et $-\frac{5}{12}\pi$ se trouvent dans l'intervalle$]-\pi\ ;\ \pi]$, ou , ce qui revient au même, $\frac{3}{4}$, $\frac{17}{18}$ et $-\frac{5}{12}$ se trouvent dans l'intervalle$]-1\ ;\ 1]$.

$\frac{200}{3}\pi$ n'est pas une mesure principale car$\frac{200}{3}\pi$ n'est pas dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ ou ce qui revient au même, $\frac{200}{3}$ ne se trouve pas dans l'intervalle$]-1\ ;\ 1]$.

6.2 Une méthode pour trouver la mesure principale d'un angle orienté

La mesure principale α correspondant à $\frac{200}{3}\pi$ est telle que :

$\alpha \in]-\pi\ ;\ \pi]$ et

$$\alpha = \frac{200}{3}\pi + k \times 2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \left(\frac{200}{3} + \boldsymbol{k} \times 2\right)\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

On cherche $\boldsymbol{k}$ dans $\mathbb{Z}$ tel que :

$-1 < \left(\frac{200}{3} + k \times 2\right) \leq 1$

$-1 < \frac{200}{3} + \frac{6k}{3} \leq 1$

$-1 < \frac{200 + 6k}{3} \leq 1$

$-3 < 200 + 6k \leq 3$

$-203 < 6k \leq -197$

$-\frac{203}{6} < k \leq -\frac{197}{6}$

$-\frac{203}{6} \approx -33{,}83 \qquad -\frac{197}{6} \approx -32{,}83$

D'où $\boldsymbol{k = -33}$

D'où la mesure principale $\alpha = \left(\frac{200}{3} - \boldsymbol{33} \times 2\right)\pi$

$\alpha = \left(\frac{200}{3} - 66\right)\pi$

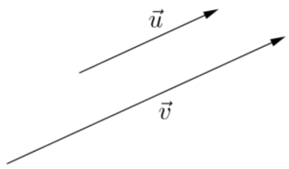
$\alpha = \left(\frac{200}{3} - \frac{198}{3}\right)\pi$

$\boxed{\alpha = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}}$

7 Propriétés des angles orientés

7.1 Vecteurs colinéaires

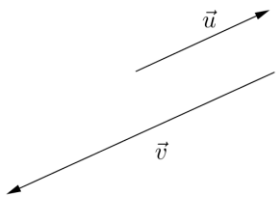
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si :



- Cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens

$$(\vec{\boldsymbol{u}}\,;\vec{\boldsymbol{v}}) = \mathbf{0} + \boldsymbol{k} \times \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

ou

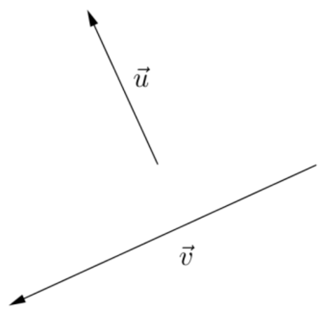


- Cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens opposés

$$(\vec{\boldsymbol{u}}\,;\vec{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{k} \times \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

7.2 Vecteurs orthogonaux

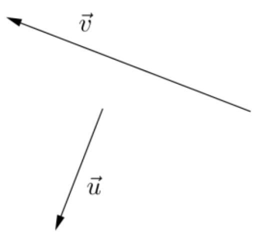
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si :



- 1^er cas

$$(\vec{\boldsymbol{u}}\,;\vec{\boldsymbol{v}}) = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{k} \times \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

ou



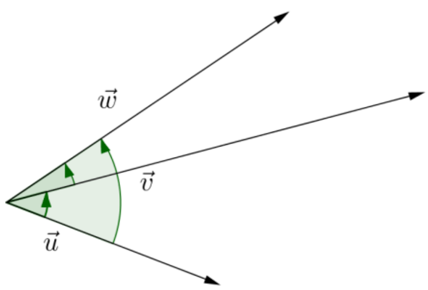
- 2^ème cas

$$(\vec{\boldsymbol{u}}\,;\vec{\boldsymbol{v}}) = -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{k} \times \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

7.3 Relation de Chasles

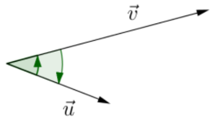
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ on a :

$$\boxed{(\vec{u}\,;\vec{v}) + (\vec{v}\,;\vec{w}) = (\vec{u}\,;\vec{w})}$$

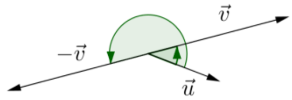


7.4 Conséquences de la relation de Chasles

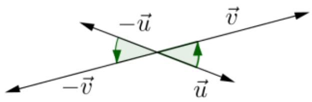
$(\vec{\boldsymbol{v}}\,;\vec{\boldsymbol{u}}) = -(\vec{\boldsymbol{u}}\,;\vec{\boldsymbol{v}}) + k \times 2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$



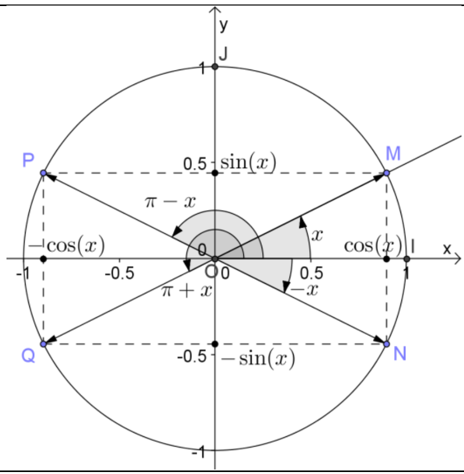
$(\vec{u}\,;-\vec{\boldsymbol{v}}) = (\vec{u}\,;\vec{v}) + \boldsymbol{\pi} + k \times 2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$



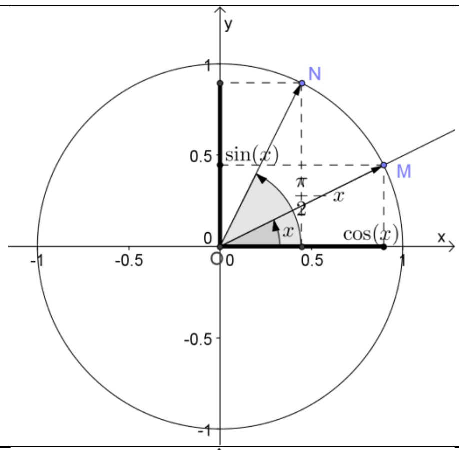
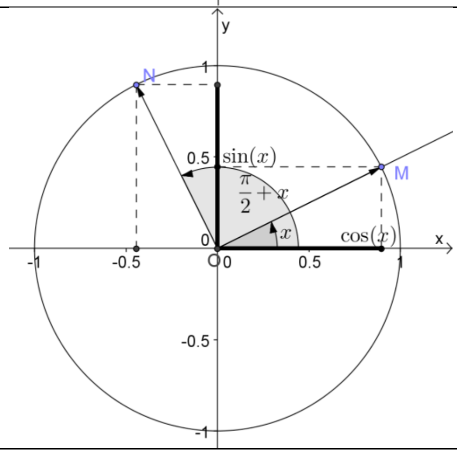
$(-\vec{\boldsymbol{u}}\,;-\vec{\boldsymbol{v}}) = (\vec{\boldsymbol{u}}\,;\vec{\boldsymbol{v}}) + k \times 2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$



8 Angles associés *x* ; –*x* ; pi+*x* ; pi-*x*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$	
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) = \sin(x) \end{cases}$	
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi + x) = -\sin(x) \end{cases}$	

9 Angles associés pi/2+*x* ; pi/2-*x*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \end{cases}$	
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) \end{cases}$	

10 Equations trigonométriques cos *x* = cos *a* et sin *x* = sin *a*

10.1 Equation cos *x* = cos *a*

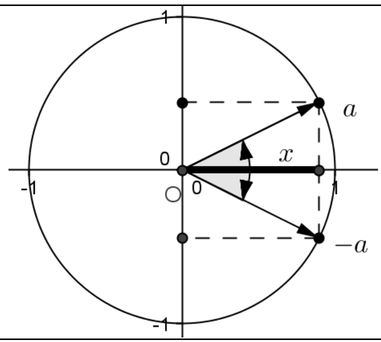
Soit x et a des réels.

L'équation :

$$\cos x = \cos a$$

a pour solutions $\boldsymbol{x = a + k \times 2\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}}$

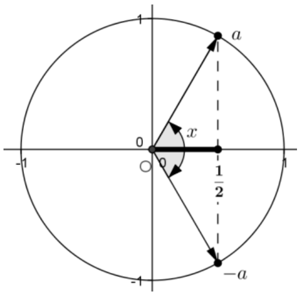
et $\boldsymbol{x = -a + k \times 2\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}}$



Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$

Réponse :



$$\cos x = \frac{1}{2}$$

On met l'équation sous la forme $\cos x = \cos a$

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$$

Solutions : $x = \boxed{\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}}}$ et $x = \boxed{\boldsymbol{-\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}}}$

10.2 Equation sin *x* = sin *a*

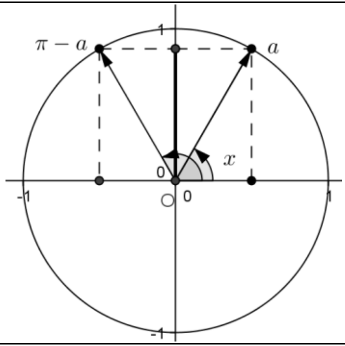
Soit x et a des réels.

L'équation :

$$\sin x = \sin a$$

a pour solutions $\boldsymbol{x = a + k \times 2\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}}$

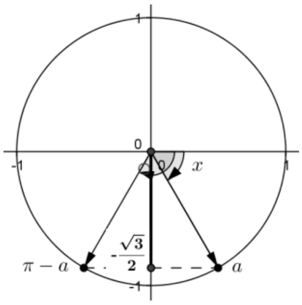
et $\boldsymbol{x = \pi - a + k \times 2\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}}$



Exemple :

Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Réponse :



$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On met l'équation sous la forme $\sin x = \sin a$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

Solutions : $x = -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ les solutions sont $x = \boxed{\boldsymbol{-\frac{\pi}{3}}}$ et $x = \pi + \frac{\pi}{3} - 2\pi = \boxed{\boldsymbol{-\frac{2\pi}{3}}}$