CHAPITRE 9 : Produit scalaire

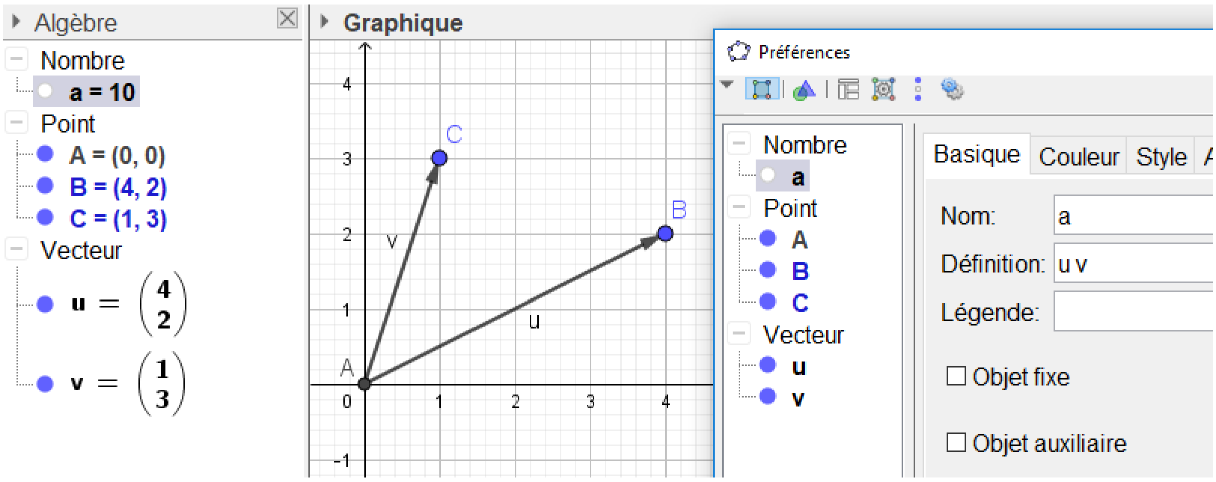
CHAPITRE 9 : produit scalaire

1 Produit scalaire, propriétés de calcul et orthogonalité

1.1 Notion de produit scalaire de deux vecteurs

Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **un nombre réel** noté $\vec{u}.\vec{v}$. Ce nombre réel est un "scalaire".
L'écriture $\vec{u}.\vec{v}$ se lit " u scalaire v ".

Exemple : Le calcul de $\vec{u}.\vec{v}$ dans GeoGebra :



Remarques :

- GeoGebra note les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sans les flèches.
- GeoGebra note le produit scalaire u v sans le point, mais avec un espace entre les vecteurs.

Ici, $\vec{u}.\vec{v} = 10$

1.2 Un cas simple : les deux vecteurs sont colinéaires

- Vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ colinéaires <u>de même sens</u>

Considérons les points A, B et C alignés dans cet ordre

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB \times BC$$

- Vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ colinéaires <u>de sens contraires</u>

Considérons les points C, A et B alignés dans cet ordre

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -AB \times BC$$

1.3 Expression du produit scalaire avec le cosinus

Propriété :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls,

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u},\vec{v})$$

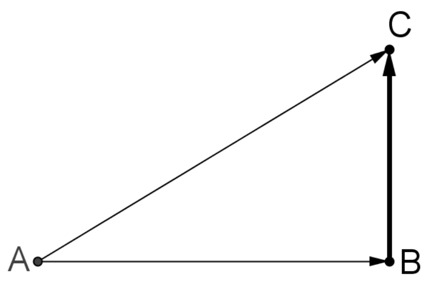
1.4 Orthogonalité de deux vecteurs

Propriété :

$\vec{u}.\vec{v} = \mathbf{0}$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**.

Démonstration :

Considérons le triangle ABC



Calcul de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{BC}\| \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{AB}\|\|BC\| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Or, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

<u>Conclusion :</u> $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0$ équivaut à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

Remarque :

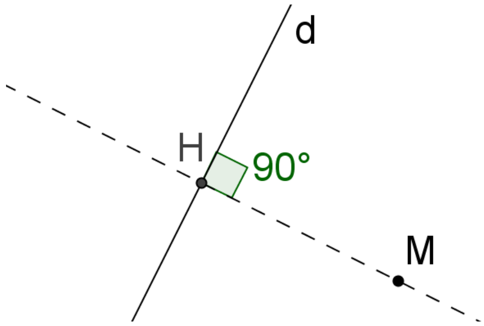
Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$. Ainsi le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan

2 Autres expressions du produit scalaire

2.1 Expression du produit scalaire avec le projeté orthogonal

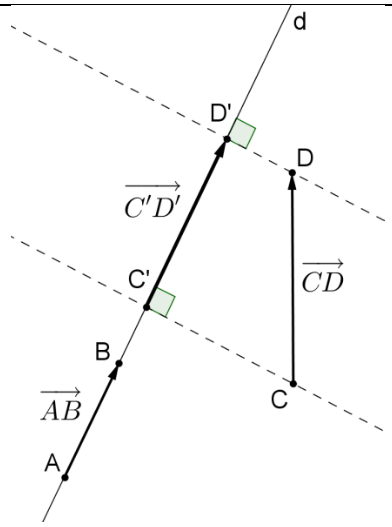
Définition :

Le **projeté orthogonal** $\boldsymbol{H}$ d'un point M **sur une droite** $\boldsymbol{d}$ est le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite d passant par M avec la droite d.



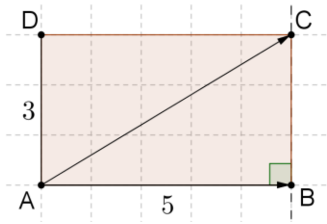
Propriété :

Soit les points A, B, C, et D, avec A et B distincts. Soit C' et D' les projetés orthogonaux des points C et D sur la droite (AB). Alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$



Conséquence :

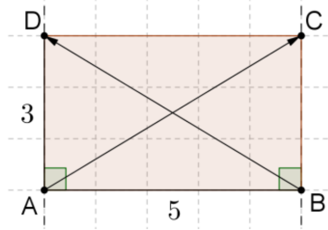
Pour calculer un produit scalaire, on peut remplacer **l'un des deux** vecteurs par son projeté orthogonal **sur la direction de l'autre**.



Exemple :

Dans le rectangle $ABCD$, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 25$$



⚠ Pour calculer un produit scalaire, <u>on ne peut pas</u> remplacer **les deux** vecteurs par leurs projetés orthogonaux **sur la direction d'un troisième**.

Exemple :

Dans le rectangle $ABCD$, <u>on n'a pas :</u>

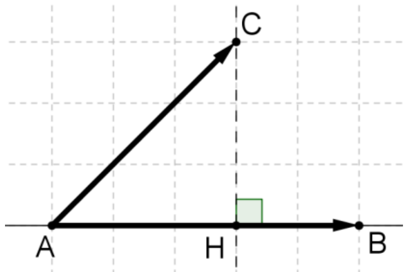
$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}$$

Mais on a : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$$

Propriété :

Soit trois points A, B et C tels que A et B soient distincts. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB)



Alors :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$$

2.2 Carré scalaire d'un vecteur

- Le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même est appelé **carré scalaire de $\vec{u}$** et est noté $\vec{u}^2$:

Pour tout vecteur $\vec{u}$:	$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

Remarque :

Pour tous points A et B du plan :	$\overrightarrow{AB}^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$

2.3 Expression analytique dans une base orthonormée

Propriété :

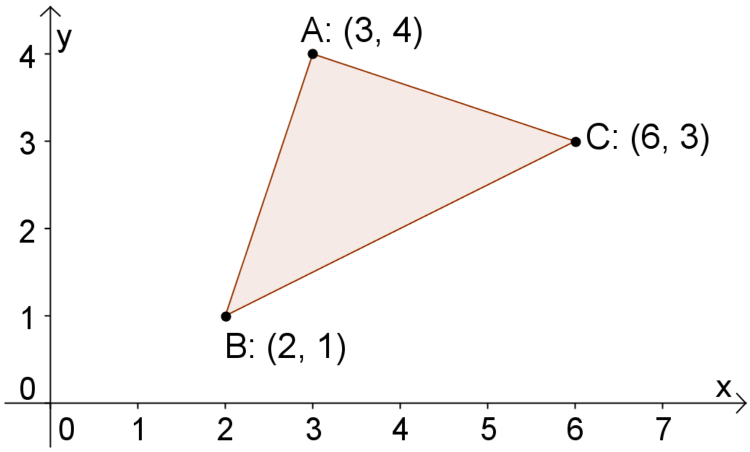
Soit dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

Exemple :

Soit trois points $A(3; 4)$, $B(2; 1)$ et $C(6; 3)$ dans un repère orthonormé.

Démontrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.



Réponse :

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-3 \\ 1-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6-3 \\ 3-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ et $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.

Donc $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|$. Donc ABC est isocèle en A.

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-1)(3) + (-3)(-1) = 0$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux donc ABC est rectangle en A.

Remarque :

$(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormée du plan signifie que $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0$ et que $\|\vec{\imath}\| = 1$ et $\|\vec{\jmath}\| = 1$

3 Application au calcul d'angles et de longueurs

3.1 Produit scalaire et calcul d'angles

- On connait l'expression du produit scalaire avec le cosinus :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

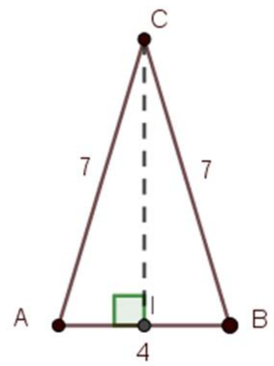
- On connait aussi d'autres méthodes pour calculer $\vec{u}.\vec{v}$ (avec les projections ou avec les coordonnées).

En rapprochant les résultats, on peut en déduire le cosinus de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ et de là, en déduire l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exemple :

Soit ABC un triangle isocèle en C de côtés $AB = 4$ et $AC = 7$.

En utilisant deux formes différentes du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, déterminer une valeur approchée à 0,1° près de l'angle $\widehat{BAC}$.



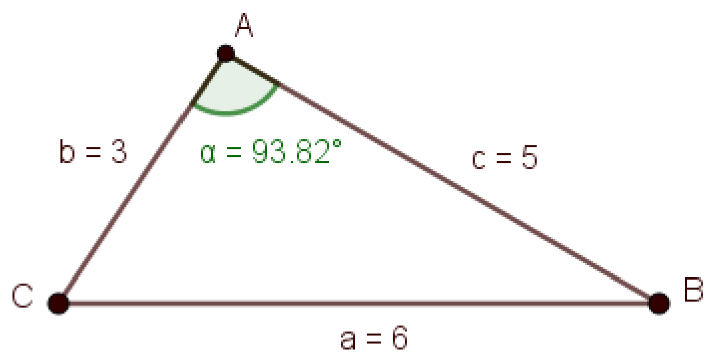
Réponse :

Le triangleABC est isocèle en C donc le projeté orthogonal de C sur $[AB]$ est le milieu I de $[AB]$.

3.2 Formule d'Al Kashi

Soit ABC un triangle. Si on note a le côté opposé à A, b le côté opposé à B et c le côté opposé à C, alors on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times cos\widehat{BAC}$$



Exemple :

Soit un triangle ABC de côtés $a = 6, b = 3, c = 5$. Calculer l'angle $\widehat{BAC}$

$6^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos \alpha$

$$36 - 9 - 25 = -30 \times \cos \alpha$$

$$-\frac{2}{30} = \cos \alpha$$

La calculatrice donne : $\cos^{-1}\left(-\frac{2}{30}\right) = 93{,}82°$ à 10^{-2} près