N°15055

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 12\cos(4x) - 24\sin\left(8x + \frac{1}{2}\pi\right).$$

Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(\frac{1}{8}\pi) = 3.$

$$\boxed{3sin(4x) + 3cos\left(8x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Correct

Solution

- 1^{ere} partie : le $cosinus$

Pour trouver une primitive de cos $(u(x))$, on part de sin $(u(x))$

Si $G(x) = \sin(4x)$ alors $G'(x) = 4\cos(4x)$ (on utilise la formule $(\sin(u))' = u'\cos(u)$ avec $\begin{cases} u(x) = 4x \\ u'(x) = 4 \end{cases}$)

On corrige le facteur 4 en multipliant par $\frac{1}{4}$

Si $G(x) = \frac{1}{4}\sin(4x)$ alors $G'(x) = \cos(4x)$

Donc si $G(x) = \frac{12}{4}\sin(4x)$ alors $G'(x) = 12\cos(4x)$

- 2^e partie : le $sinus$

Si $G(x) = \cos(8x + \frac{\pi}{2})$ alors $G'(x) = -8\sin(8x + \frac{\pi}{2})$ (on utilise la formule $(\cos(u))' = -u'\sin(u)$ avec $\begin{cases} u(x) = 8x + \frac{\pi}{2} \\ u'(x) = 8 \end{cases}$)

On corrige le facteur -8 en multipliant par $-\frac{1}{8}$

Si $G(x) = -\frac{1}{8}\cos(8x + \frac{\pi}{2})$ alors $G'(x) = \sin(8x + \frac{\pi}{2})$

Donc si $G(x) = -\frac{-24}{8}\cos\left(8x + \frac{\pi}{2}\right)$ alors $G'(x) = -24\sin\left(8x + \frac{\pi}{2}\right)$

Donc l'ensemble des primitives de f sont les fonctions H définies sur $\mathbb{R}$ par

$H(x) = \frac{12}{4}\sin(4x) + \frac{24}{8}\cos\left(8x + \frac{\pi}{2}\right) + k,\ \ k \in \mathbb{R}.$

$H(x) = 3\sin(4x) + 3\cos\left(8x + \frac{\pi}{2}\right) + k,\ \ k \in \mathbb{R}.$

La condition $F\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3$ permet de déterminer la valeur de la constante réelle k :

$3\sin\left(4 \times \frac{\pi}{8}\right) + 3\cos\left(8 \times \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) + k = 3$

$3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) + k = 3$

$3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + k = 3$

$3 \times 1 + 3 \times 0 + k = 3$

$3 + k = 3$

$k = 0$

Donc $F(x) = \mathbf{3\sin(4x) + 3\cos\left(8x + \frac{\pi}{2}\right)}$