N°47006

Partie 1

Soit l'équation différentielle (E) : $2y' - 8y = -320x^2$

Soit a, b et c trois réels tels que la fonction $f_0 : x \mapsto ax^2 + bx + c$ soit une solution de (E).

Déterminer a, b et c et en déduire l'expression de f_0.

$$40x^2 + 20x + 5$$

Correct

Solution

On calcule $f_0'(x)$

Puisque $f_0(x) = ax^2 + bx + c$ alors $f_0'(x) = 2ax + b$

Dans l'équation on remplace y' par $f_0'(x)$ et y par $f_0(x)$. Cela permet de calculer a, b et c :

$2(2ax + b) - 8(ax^2 + 8bx + c) = -320x^2$.

$4ax + 2b - 8ax^2 - 8bx - 8c + 320x^2 = 0$.

On regroupe par puissances de x :

$(-8a + 320)x^2 + (4a - 8b)x + (2b - 8c) = 0$.

Cela équivaut à

$$\begin{cases} -8a + 320 = 0 \\ 4a - 8b = 0 \\ 2b - 8c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 320 = 8a \\ 4a = 8b \\ 2b = 8c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 40 \\ 160 = 8b \\ 2b = 8c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 40 \\ b = 20 \\ 2 \times 20 = 8c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 40 \\ b = 20 \\ c = 5 \end{cases}$$

Donc $f_0(x) = \mathbf{40x^2 + 20x + 5}$

Partie 2

Résoudre l'équation différentielle (E') : $2y' - 8y = 0$.
On donnera la forme générale de la solution la plus simple possible, en utilisant A pour la valeur non fixée.
Par exemple : $y : x \mapsto Ae^{2x} + 3$.

$$y{:}x \mapsto Ae^{4x}$$

Correct 😀

Solution

On met l'équation différentielle (E') sous la forme $y' = ay$ pour avoir des solutions sous la forme $f(x) = Ke^{ax}$

$2y' - 8y = 0$

$2y' = 8y$

$y' = 4y$

Donc les solutions sont de la forme $f(x) = Ke^{4x}, \quad K \in \mathbb{R}$.

Puisque l'énoncé utilise la lettre A pour la constante réelle, alors les solutions sont les fonctions $x \longmapsto \boldsymbol{Ae^{4x}}$

Partie 3

En déduire l'ensemble des solutions de (E).
On donnera la forme générale de la solution la plus simple possible, en utilisant A pour la valeur non fixée.
Par exemple : $y : x \mapsto Ae^{2x} + 3$.

$$y{:}x \mapsto Ae^{4x} + 40x^2 + 20x + 5$$

Correct 😀

Pour résoudre l'équation différentielle (E) on la met sous la forme $y' = ay + f$.

$2y' - 8y = -320x^2$

$2y' = 8y - 320x^2$

$y' = 4y - 160x^2$

Les solutions sont de la forme $u(x) + v(x)$ où :

$u(x)$ est une solution particulière de l'équation complète

$v(x)$ est la solution générale de l'équation $y' = ay$

D'après la partie 1 on a $\boldsymbol{u(x) = 40x^2 + 20x + 5}$

D'après la partie 2 on a $\boldsymbol{v(x) = Ae^{4x}}$

Alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions $x \longmapsto \boldsymbol{Ae^{4x} + 40x^2 + 20x + 5}$