N°47013

Partie 1

Soit l'équation différentielle (E) : $3y' + 9y = -60\sin(x)$

Soit a et b deux réels tels que la fonction $f_0 : x \mapsto acos(x) + bsin(x)$ soit une solution de (E).

Déterminer a et b et en déduire l'expression de f_0.

$$2cos(x) - 6sin(x)$$

Correct

Solution

On calcule $f_0'(x)$

Puisque $f_0(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ alors $f_0'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$

Dans l'équation on remplace y' par $f_0'(x)$ et y par $f_0(x)$. Cela permet de calculer a et b :

$3(-a\sin(x) + b\cos(x)) + 9(a\cos(x) + b\sin(x)) = -60\sin(x)$.

$-3a\sin(x) + 3b\cos(x) + 9a\cos(x) + 9b\sin(x) = -60\sin(x)$

On regroupe les $\sin(x)$ et les $\cos(x)$:

$-3a\sin(x) + 9b\sin(x) + 60\sin(x) + 3b\cos(x) + 9a\cos(x) = 0$

$(-3a + 9b + 60)\sin(x) + (3b + 9a)\cos(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Cela équivaut à

$$\begin{cases} -3a + 9b + 60 = 0 \\ 3b + 9a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a + 9b + 60 = 0 \\ 9a = -3b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a + 9b + 60 = 0 \\ -3a = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a + 9 \times -3a + 60 = 0 \\ 3b + 9a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -30a + 60 = 0 \\ 3b + 9a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 60 = 30a \\ 3b + 9a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = a \\ 3b + 9a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = a \\ 3b + 18 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = a \\ 18 = -3b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = a \\ -6 = b \end{cases}$$

Donc $f_0(x) = \mathbf{2\cos(x) - 6\sin(x)}$

Partie 2

Résoudre l'équation différentielle (E') : $3y' + 9y = 0$.
On donnera la forme générale de la solution la plus simple possible, en utilisant A pour la valeur non fixée.
Par exemple : $y\,:\,x \mapsto Ax^2 + 3$.

$y{:}x{\mapsto}Ae^{-3x}$

Correct 😀

Solution

On met l'équation différentielle (E') sous la forme $y' = ay$ pour avoir des solutions sous la forme $f(x) = Ke^{ax}$

$3y' + 9y = 0$

$3y' = -9y$

$y' = -3y$

Donc les solutions sont de la forme $f(x) = Ke^{-3x}, \quad K \in \mathbb{R}$.

Puisque l'énoncé utilise la lettre A pour la constante réelle, alors les solutions sont les fonctions $x \longmapsto \boldsymbol{Ae^{-3x}}$

Partie 3

En déduire l'ensemble des solutions de (E).
On donnera la forme générale de la solution la plus simple possible, en utilisant A pour la valeur non fixée.
Par exemple : $y\,:\,x \mapsto Ax^2 + 3$.

$y{:}x{\mapsto}Ae^{-3x} + 2cos(x) - 6sin(x)$

Correct 😀

Solution Pour résoudre l'équation différentielle (E) on la met sous la forme $y' = ay + f$.

$3y' + 9y = -60\sin(x)$

$3y' = -9y - 60\sin(x)$

$y' = -3y - 20\sin(x)$

Les solutions sont de la forme $u(x) + v(x)$ où :

$u(x)$ est une solution particulière de l'équation complète

$v(x)$ est la solution générale de l'équation $y' = ay$

D'après la partie 1 on a $\boldsymbol{u(x) = 2\cos(x) - 6\sin(x)}$

D'après la partie 2 on a $\boldsymbol{v(x) = Ae^{-3x}}$

Alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions $x \longmapsto \boldsymbol{Ae^{-3x} + 2\cos(x) - 6\sin(x)}$

Partie 4

Déterminer h la solution de (E) telle que $h(-\frac{1}{2}\pi) = -1$

$$h{:}x \mapsto -7e^{-\frac{3\pi}{2} - 3x} + 2cos(x) - 6sin(x)$$

Correct 😀

Solution

h est solution de l'équation (E) donc h est définie par :

$$h(x) = Ae^{-3x} + 2\cos(x) - 6\sin(x)$$

On peut déterminer la valeur de la constante A à l'aide de la condition particulière $h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Elle équivaut à :

$Ae^{-3\times-\frac{\pi}{2}} + 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 6\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$Ae^{\frac{3\pi}{2}} + 2\times 0 - 6\times -1 = -1$

$Ae^{\frac{3\pi}{2}} + 6 = -1$

$Ae^{\frac{3\pi}{2}} = -7$

$A = -7e^{-\frac{3\pi}{2}}$

Alors la fonction h est la fonction $h{:}\,x \longmapsto -7e^{-\frac{3\pi}{2}}e^{-3x} + 2\cos(x) - 6\sin(x)$

$$\boldsymbol{h{:}\,x \longmapsto -7e^{-\frac{3\pi}{2}-3x} + 2\cos(x) - 6\sin(x)}$$