N°48031

Dans un jeu de 40 cartes contenant les valeurs 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As, on appelle main tout ensemble de 5 cartes.

Combien y a-t-il de mains différentes ?

658008

Correct

♣	5 T	6 T	7 T	8 T	9 T	10 T	V T	D T	R T	As T
♦	5 Ca	6 Ca	7 Ca	8 Ca	9 Ca	10 Ca	V Ca	D Ca	R Ca	As Ca
♥	5 Co	6 Co	7 Co	8 Co	9 Co	10 Co	V Co	D Co	R Co	As Co
♠	5 P	6 P	7 P	8 P	9 P	10 P	V P	D P	R P	As P

40 cartes

Une main de cinq cartes parmi 40 est une partie à 5 éléments d'un ensemble de 40 éléments car l'ordre des cartes n'a pas d'importance dans une main.

Le nombre de mains $\binom{40}{5} = 658008$

Combien y a-t-il de mains différentes contenant au moins un pique ?

515502

Correct

L'énoncé contient l'expression **au moins**. Donc on passe par le **complémentaire** :

<u>Calcul du nombre de mains ne contenant aucun pique</u>

On retire du jeu les dix cartes de pique. Il reste 30 cartes non-pique.

Le nombre de mains non-pique est $\binom{30}{5} = 142506$

Donc, par différence, le nombre de mains contenant au moins une carte de pique est :

$$658008 - 142506 = 515502$$

Combien y a-t-il de mains différentes contenant au plus un pique ?

416556

Correct

Au plus un pique signifie :

0 pique et 5 cartes non-pique

ou

1 pique et 4 cartes non-pique

- Nombre de mains avec 0 pique et 5 non-pique : $\binom{30}{5} = \mathbf{142506}$
- Nombre de mains avec 1 pique et 4 non-pique :

Il y a $\binom{10}{1} = 10$ façons de choisir la carte de pique parmi les 10 cartes de pique.

Il y a $\binom{30}{4} = 27405$ façons de choisir les quatre cartes non-pique parmi les 30 cartes non-pique.

Donc il y a $\binom{10}{1} \times \binom{30}{4} = \mathbf{274050}$ mains contenant exactement 1 pique et 4 cartes non-pique.

Donc au total, il y a $142506 + 274050 = \mathbf{416556}$ mains de cinq cartes qui contiennent au plus un pique.

Combien y a-t-il de mains différentes contenant exactement 1 roi et 2 piques ?

64233

Correct

♣	5 T	6 T	7 T	8 T	9 T	10 T	V T	D T	cR T	As T
♦	5 Ca	6 Ca	7 Ca	8 Ca	9 Ca	10 Ca	V Ca	D Ca	R Ca	As Ca
♥	5 Co	6 Co	7 Co	8 Co	9 Co	10 Co	V Co	D Co	R Co	As Co
♠	~~5 P~~	~~6 P~~	~~7 P~~	~~8 P~~	~~9 P~~	~~10 P~~	~~V P~~	~~D P~~	~~R P~~	~~As P~~

3 x 9 = 27 cartes non-pique et non-roi

Il y a deux types de mains à envisager :

- Le roi n'est pas de pique. Dans ce cas il faut deux cartes de pique non-roi et deux cartes non-pique et non-roi

Le nombre de possibilités de choisir le roi non-pique parmi les 3 rois est $\binom{3}{1} = 3$.

Le nombre de possibilités de choisir les deux cartes de pique non-roi parmi les 9 cartes de ce type est $\binom{9}{2} = 36$.

Le nombre de possibilités de choisir les deux cartes non-pique non-roi parmi les 27 cartes de ce type est $\binom{27}{2} = 351$

Ce qui donne $3 \times 36 \times 351 = \mathbf{37908}$ mains contenant exactement 1 roi et 2 piques (le roi n'est pas de pique).

Ensuite :

- Le roi est de pique. Dans ce cas il faut <u>une</u> carte de pique non-roi pour faire les deux cartes de pique et <u>trois</u> cartes non-pique et non-roi pour compléter la main de cinq cartes.

Le nombre de possibilités de choisir le roi de pique est égal à 1.

Le nombre de possibilités de choisir la carte de pique non-roi parmi les 9 cartes de ce type est $\binom{9}{1} = 9$.

Le nombre de possibilités pour les trois cartes non-pique non-roi parmi les 27 cartes de ce type est $\binom{27}{3} = 2925$.

Ce qui donne $1 \times 9 \times 2925 = \mathbf{26325}$ mains contenant exactement 1 roi et 2 piques (le roi n'est pas de pique).

Conclusion :

Le nombre de mains contenant exactement 1 roi et 2 piques est la somme :

$$37908 + \ 26325 = \mathbf{64233}$$