

39

ALGO PYTHON

1. Démontrer que l'équation  $x^2 e^x = 1$  admet une unique solution et que cette solution appartient à l'intervalle  $[0 ; 1]$ .
2. On donne la fonction `alpha` ci-dessous écrite en Python.

```
1 from math import e
2 def alpha(precision):
3     a=0
4     b=1
5     while b-a>=precision:
6         c=(b+a)/2
7         f=c**2*e**c
8         if f<=1:
9             a=c
10        else:
11            b=c
12    return a,b
```

- a. Quelles seront les valeurs retournées par l'instruction `alpha(0.1)`?
- b. Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.

1) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 e^x$

- $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = 2x(e^x) + (x^2)e^x$   
 $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$   
 $f'(x) = x(x+2)e^x$

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$
signe de $x$	-		- 0 +	+
signe de $x+2$	-	0	+	-
signe de $f'(x)$	+	0	- 0 +	+
variations de $f$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$f(-2) = 4e^{-2} \approx 0,54$

$f(0) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Sur  $] -\infty; 0]$ ,  $f$  a comme maximum  $4e^{-2} < 1$   
 Donc l'équation  $f(x) = 1$  n'a pas de solution sur cet intervalle.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

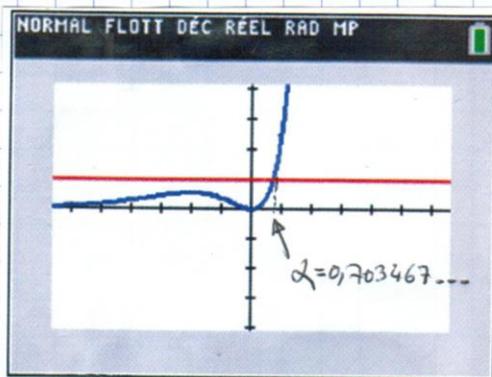
$1 \in [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 1$  a une unique solution dans  $\mathbb{R}$

$f(1) = e \approx 2,718$

$1 \in [f(0); f(1)]$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 1$  a une unique solution dans  $[0; 1]$



2) a)  $\alpha(0,1)$  renvoie  $(0,6875; 0,75)$

b) interprétation: L'intervalle  $[0,6875; 0,75]$  contient la valeur de la solution  $\alpha$  à l'équation  $f(x) = 1$ .  
 L'amplitude de l'intervalle est  $0,75 - 0,6875 = 0,0625$   
 Elle est inférieure à  $0,1$ .

Voir sur la page (39) le fonctionnement des états des variables

