

Partie A

1) • Limite en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} (x+2) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ } donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$

• Limite en $+\infty$: $g(x) = x + 2 - x \ln(x)$
 $g(x) = x - x \ln(x) + 2$
 $g(x) = x(1 - \ln(x)) + 2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln(x)) = -\infty$ } donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln(x)) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$ } donc

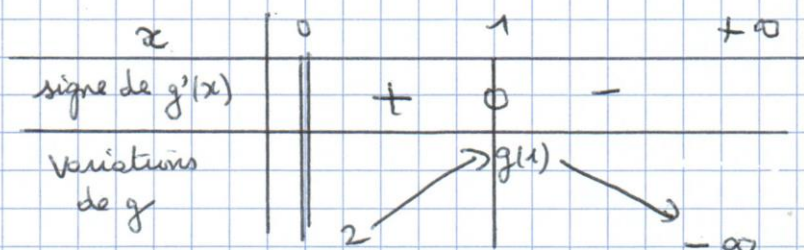
par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

2) $g'(x) = 1 - (\ln(x) + x \times \frac{1}{x})$

$g'(x) = 1 - (\ln(x) + 1)$

$g'(x) = 1 - \ln(x) - 1$

$g'(x) = -\ln(x)$



$g(1) = 1 + 2 - 1 \ln(1)$
 $g(1) = 3$

3) • Si $x \in]0; 1]$ alors g est croissante donc

$x > 0$
 $g(x) > \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

$g(x) > 2$ donc sur cet intervalle $g(x) = 0$ n'a pas de solution.

• Si $x \in [1; +\infty[$ alors:

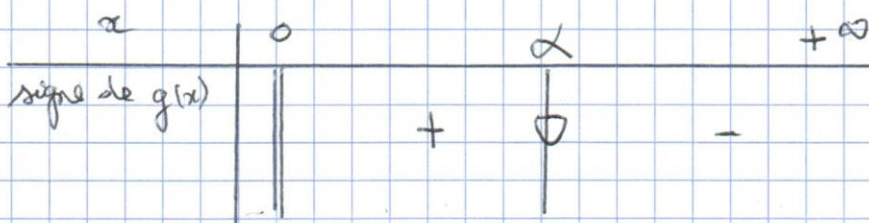
* g est continue

* g est strictement décroissante

* $0 \in] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); g(1)]$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

On en déduit le signe de $g(x)$:



Partie B :

f est la fonction définie pour tout $x \in]0; +\infty[$
par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x+2}$

$$1) f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)(x+2) - (\ln(x))(1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2}{x} - \ln(x)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x+2-x\ln(x)}{x}}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x+2-x\ln(x)}{x} \times \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x+2-x\ln(x)}{x(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+2)^2}$$

2) • $g(x) = 0$ c'est à dire $x+2-x\ln(x) = 0$ d'où
 $\alpha+2 = \alpha\ln(\alpha)$
 • $f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha)}{2+\alpha}$ (1) $\frac{\alpha+2}{\alpha} = \ln(\alpha)$

On utilise la relation (1) :

$$f(\alpha) = \frac{\frac{\alpha+2}{\alpha}}{2+\alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{\frac{\alpha+2}{\alpha}}{\frac{2+\alpha}{1}}$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha+2}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha+2}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

3) • Limite en 0 :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} (2+x) = 2 \end{array} \right\} \text{ donc par quotient, } \underline{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty}$$

• Limite en $+\infty$

$$\text{Soit } \frac{1}{f(x)} = \frac{2+x}{\ln(x)} = \frac{2}{\ln(x)} + \frac{x}{\ln(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\ln(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\ln(x)} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc par somme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\ln(x)} + \frac{x}{\ln(x)} \right) = +\infty$$

$$\text{Donc on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty \text{ et donc par inverse } \underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

4)

x	0	x	$+\infty$
signe de $g(x)$		+	-
signe de x		+	+
signe de $(x+2)^2$		+	+
signe de $f'(x)$		+	-
variations de f			

$-\infty \swarrow \quad \searrow 0$
 $\frac{1}{2}$

5) $4,31 < x < 4,32$

(on programme $Y_1 = g(x) = x+2 - x \ln(x)$
on trace la courbe et on calcule
avec la calculatrice la racine.)