

Exemples : Calculer les intégrales suivantes avec la méthode d'intégration par parties :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

a/ $\int_1^e x \ln(x) dx$. On pose v la fonction qu'on dérive. Ici, puisqu'on ne connaît pas de primitive usuelle à $\ln(x)$, on n'a pas le choix. On doit poser $v(x) = \ln(x)$ et donc $u'(x) = x$.
 $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$ donc $\begin{cases} u(x) = \frac{x^2}{2} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ donc $\int_1^e x \ln(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} \ln(e) - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{2e^2}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$

b/ En posant $u(t) = t$ et $v'(t) = \sin(t)$, puis en appliquant la formule d'intégration par parties, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) dt$.
 $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \sin(t) \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\cos(t) \end{cases}$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) dt = \left[-t \cos(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = \left[-t \cos(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

c/ En posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(t)$, intégrer par parties $F(x) = \int_1^x \ln(t) dt$.

$\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \ln(t) \end{cases}$ donc $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$ donc $F(x) = \left[t \ln(t) \right]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t} dt$
 $F(x) = \left[t \ln(t) \right]_1^x - \left[t \right]_1^x$
 $F(x) = x \ln(x) - 0 - (x - 1)$
 $F(x) = x \ln(x) - x + 1$

Que représente alors la fonction F ?

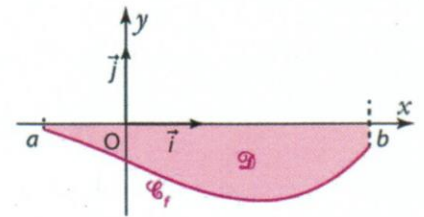
D'après le §2.1 F est la primitive de la fonction $\ln$ qui s'annule en $x=1$

5 Applications du calcul intégral

5.1 Aire sous la courbe d'une fonction négative

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a; b]$ et C_f sa courbe représentative. $\int_a^b f(x) dx$ est un réel négatif.

L'aire du domaine D délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :



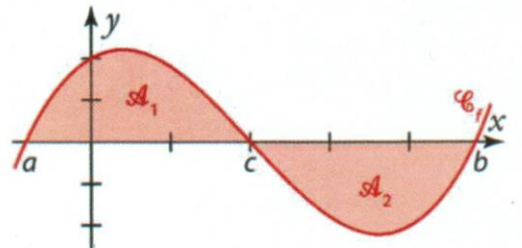
$$A = - \int_a^b f(x) dx \text{ exprimée en unité d'aire.}$$

5.2 Aire pour une fonction de signe non constant

Il faut connaître le signe de la fonction avant de pouvoir calculer des aires. Ensuite, on décompose l'intervalle en sous-intervalle où la fonction est de signe constant.

L'aire totale = Aire du domaine $\mathcal{A}_1$ + Aire du domaine $\mathcal{A}_2$ se traduit par :

$$\mathcal{A} = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx.$$



Exemple :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$. Calculer :

1/ L'aire $\mathcal{A}$ comprise entre la courbe et l'axe des abscisses entre les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

2/ L'aire $\mathcal{B}$ comprise entre la courbe et l'axe des abscisses entre les droites $x = -5$ et $x = 1$.

Méthode : Étudier le signe de la fonction sur l'intervalle considéré.

- Si f est positive alors il y a égalité entre l'aire et l'intégrale.
- Si f est négative alors c'est l'opposé de l'intégrale qui est l'aire.
- Si f n'est pas de signe constant alors il faut décomposer l'intervalle en sous-intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant.