|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Tous les élèves de Terminale Spécialité Mathématiques** | **DEVOIR DE** **MATHEMATIQUES****N° 1** | Vendredi 16 Octobre 2020 |
| Durée : **2 heures** |
| Lycée Privé d’Avesnières | **Calculatrice autorisée** |

NOM, PRENOM : …

**L’énoncé est à rendre avec votre copie.**

**Exercice 1 :** (7,5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) en deux parties. La partie A porte sur les limites de suites et la partie B porte sur le dénombrement.

Pour chaque question, une seule des 4 réponses proposées est exacte.

Une réponse correcte rapporte 0,5 point dans la partie A et 1 point dans la partie B. Une réponse fausse ou l’absence de réponse n’apporte pas de point et n’enlève pas de point.

Indiquer vos réponses dans les deux tableaux prévus à cet effet **sur cet énoncé**. On ne demande pas de justification.

**Partie A : QCM sur le thème des limites de suites**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Réponse A** | **Réponse B** | **Réponse C** | **Réponse D** |
| 1/ La suite (*Un*) définie pour tout *n* $\in $ $N $par :*Un* = *n* − 5*n*2 | a pour limite + $\infty $ | a pour limite 0 | a pour limite − $\infty $ | n’a pas de limite |
| 2/ La suite (*Vn*) définie pour tout *n* $\in $ $N $par :*Vn* = *n* − 5×sin(*n*) | a pour limite + $\infty $ | a pour limite 0 | a pour limite − $\infty $ | n’a pas de limite |
| 3/ La suite (*Wn*) telle que :$\frac{1}{2n+1}$ < *Wn* < $\frac{3n+1}{n^{2}+2}$ pour tout *n* $\in $ $N $ | a pour limite + $\infty $ | a pour limite 0 | a pour limite − $\infty $ | n’a pas de limite |
| 4/ La suite géométrique (*An*) de premier terme *A*0 = −3 et de raison $\frac{1}{4}$ | a pour limite + $\infty $ | a pour limite 0 | a pour limite − $\infty $ | n’a pas de limite |
| 5/ La suite (*Bn*) telle que :*Bn* < −2 × 1,5*n* pour tout *n* $\in $ $N $ | a pour limite + $\infty $ | a pour limite 0 | a pour limite − $\infty $ | n’a pas de limite |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Question** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **Réponse choisie** | **…** | **…** | **…** | **…** | **…** |

**Partie B : QCM sur le thème du dénombrement**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Réponse A** | **Réponse B** | **Réponse C** | **Réponse D** |
| 1/ Le nombre de groupes de quatre personnes que l’on peut former à l’aide d’un ensemble de 15 personnes est : | 4 × 15 | $$\left(\begin{array}{c}15\\4\end{array}\right)$$ | 154 | 415 |
| 2/ Parmi tous les entiers d’exactement cinq chiffres, combien y en a-t-il qui ne contiennent que des chiffres impairs ? | 55 | 4 × 55 | $$\left(\begin{array}{c}10\\5\end{array}\right)$$ | 5 ! |
| 3/ Dans une association de 27 personnes, combien de façons y a-t-il de choisir un président, un trésorier, un secrétaire et un vice-président ? | 27 × 4 | 274 | $$\left(\begin{array}{c}27\\4\end{array}\right)$$ | 27 × 26 × 25 × 24 |
| 4/ Quel est le nombre d’anagrammes du mot MATH ?*Anagramme : Mot ayant un sens ou non obtenu par transposition des lettres d'un mot (exemple : MARIE et AIMER).* | 4 × 4 | 44 | $$\left(\begin{array}{c}4\\4\end{array}\right)$$ | 4 ! |
| 5/ Quand un groupe de 18 personnes s’échange des poignées de mains, le nombre de poignées de mains est : | 18 × 17 | 182 | $$\left(\begin{array}{c}18\\2\end{array}\right)$$ | 218 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Question** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **Réponse choisie** | **…** | **…** | **…** | **…** | **…** |

**Exercice 2 :** (5 points)

Le premier janvier 2020, il y a 200 poissons dans un aquarium. Chaque année, 15 % des poissons meurent et on ajoute 45 nouveaux poissons en fin d’année.

On note *Un* le nombre de poissons dans l’aquarium le 1er Janvier 2020 + *n*.

1/ Justifier que, pour tout *n* de $N$, *Un*+1 = 0,85 *Un* + 45.

2/ Démontrer, par un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel *n*, *Un* = −100 × 0,85*n* + 300.

***Pour la suite de l’exercice, on utilisera la forme explicite démontrée à la question 2.***

3/ Démontrer que *Un*+1 – *Un* = 15 × 0,85*n* pour tout *n* de $N$ et en déduire le sens de variation de la suite (*Un*).

4/ Déterminer la limite de la suite (*Un*).

5/ Interpréter les résultats des questions 3 et 4 dans le contexte de l’exercice.

**Exercice 3 :** (7,5 points)

Une biologiste désire étudier l’évolution de la population de singes sur une ile.

En 2020, elle estime qu’il y a 1000 singes sur l’ile.

Les ressources naturelles de l’ile ne permettent pas d’accueillir plus de 4000 singes.

**Partie A : Etude d’un premier modèle.**

La biologiste suppose que la population de singes augmente de 4 % chaque année.

On note *Un* le nombre de singes **en milliers** sur l’ile en 2020 + *n*.

1/ Exprimer *Un*+1 en fonction de *Un*.

2/ Préciser la nature de la suite (*Un*) puis exprimer *Un* en fonction de *n*.

3/ Déterminer la limite de la suite (*Un*).

4/ Ce modèle vous parait-il convenir à la situation réelle de la population de singes sur l’ile ? Justifier.

**Partie B : Etude d’un second modèle**

La biologiste reçoit l’aide d’un mathématicien qui modélise la population de singes (en **milliers** d’individus) par la suite (*Vn*) définie par *V*0 = 1 et *Vn*+1 = − 0,025 $V\_{n}^{2}$ + 1,1 *Vn*.

Soit *f* la fonction définie sur [1 ; + $\infty $[ par *f*(*x*) = − 0,025 *x*2 + 1,1 *x*.

On remarque alors que *Vn*+1 = *f*(*Vn*).

1/ Démontrer que la fonction *f* est strictement croissante sur l’intervalle [1 ; 22].

2/ Démontrer, par un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel *n*, on a 1 ≤ *Vn* ≤ *Vn*+1 ≤ 4.

3/ En déduire la convergence de la suite (*Vn*).

4/ Soit $l$ la limite de la suite (*Vn*). On admet que $l$ = *f*($l$).

 a/ Déterminer la valeur de $l$.

 b/ Interpréter cette limite dans le contexte de l’énoncé.

5/ On souhaite déterminer le nombre d’années au bout duquel la population de singes dépassera les 3000 individus. Compléter **sur l’énoncé** la fonction ci-dessous en Python pour qu’elle réponde au problème.

def pop() :

 N = …

 V = …

 while …  :

 V = …

 N = …

 return …