Tous les élèves de Terminale Spécialité Mathématiques	DEVOIR DE MATHEMATIQUES N° 1	Vendredi 16 Octobre 2020
		Durée : **2 heures**
Lycée Privé d'Avesnières		**Calculatrice autorisée**

NOM, PRENOM : …

L'énoncé est à rendre avec votre copie.

Exercice 1 : (7,5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) en deux parties. La partie A porte sur les limites de suites et la partie B porte sur le dénombrement.

Pour chaque question, une seule des 4 réponses proposées est exacte.

Une réponse correcte rapporte 0,5 point dans la partie A et 1 point dans la partie B. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'apporte pas de point et n'enlève pas de point.

Indiquer vos réponses dans les deux tableaux prévus à cet effet **sur cet énoncé**. On ne demande pas de justification.

Partie A : QCM sur le thème des limites de suites

	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
1/ La suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $U_n = n - 5n^2$	a pour limite $+\infty$	a pour limite 0	a pour limite $-\infty$	n'a pas de limite
2/ La suite (V_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $V_n = n - 5\times\sin(n)$	a pour limite $+\infty$	a pour limite 0	a pour limite $-\infty$	n'a pas de limite
3/ La suite (W_n) telle que : $\frac{1}{2n+1} < W_n < \frac{3n+1}{n^2+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$	a pour limite $+\infty$	a pour limite 0	a pour limite $-\infty$	n'a pas de limite
4/ La suite géométrique (A_n) de premier terme $A_0 = -3$ et de raison $\frac{1}{4}$	a pour limite $+\infty$	a pour limite 0	a pour limite $-\infty$	n'a pas de limite
5/ La suite (B_n) telle que : $B_n < -2 \times 1{,}5^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$	a pour limite $+\infty$	a pour limite 0	a pour limite $-\infty$	n'a pas de limite

Question	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Réponse choisie	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**

Partie B : QCM sur le thème du dénombrement

	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
1/ Le nombre de groupes de quatre personnes que l'on peut former à l'aide d'un ensemble de 15 personnes est :	4×15	$\binom{15}{4}$	15^4	4^{15}
2/ Parmi tous les entiers d'exactement cinq chiffres, combien y en a-t-il qui ne contiennent que des chiffres impairs ?	5^5	4×5^5	$\binom{10}{5}$	$5\,!$
3/ Dans une association de 27 personnes, combien de façons y a-t-il de choisir un président, un trésorier, un secrétaire et un vice-président ?	27×4	27^4	$\binom{27}{4}$	$27 \times 26 \times 25 \times 24$
4/ Quel est le nombre d'anagrammes du mot MATH ? *Anagramme : Mot ayant un sens ou non obtenu par transposition des lettres d'un mot (exemple : MARIE et AIMER).*	4×4	4^4	$\binom{4}{4}$	$4\,!$
5/ Quand un groupe de 18 personnes s'échange des poignées de mains, le nombre de poignées de mains est :	18×17	18^2	$\binom{18}{2}$	2^{18}

Question	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Réponse choisie	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**

Exercice 2 : (5 points)

Le premier janvier 2020, il y a 200 poissons dans un aquarium. Chaque année, 15 % des poissons meurent et on ajoute 45 nouveaux poissons en fin d'année.

On note U_n le nombre de poissons dans l'aquarium le 1er Janvier 2020 + n.

1/ Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = 0,85\, U_n + 45$.

2/ Démontrer, par un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $U_n = -100 \times 0,85^n + 300$.

Pour la suite de l'exercice, on utilisera la forme explicite démontrée à la question 2.

3/ Démontrer que $U_{n+1} - U_n = 15 \times 0,85^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire le sens de variation de la suite (U_n).

4/ Déterminer la limite de la suite (U_n).

5/ Interpréter les résultats des questions 3 et 4 dans le contexte de l'exercice.

<u>Exercice 3 :</u> (7,5 points)

Une biologiste désire étudier l'évolution de la population de singes sur une ile.

En 2020, elle estime qu'il y a 1000 singes sur l'ile.

Les ressources naturelles de l'ile ne permettent pas d'accueillir plus de 4000 singes.

<u>Partie A :</u> Etude d'un premier modèle.

La biologiste suppose que la population de singes augmente de 4 % chaque année.

On note U_n le nombre de singes **<u>en milliers</u>** sur l'ile en 2020 + n.

1/ Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.

2/ Préciser la nature de la suite (U_n) puis exprimer U_n en fonction de n.

3/ Déterminer la limite de la suite (U_n).

4/ Ce modèle vous parait-il convenir à la situation réelle de la population de singes sur l'ile ? Justifier.

<u>Partie B :</u> Etude d'un second modèle

La biologiste reçoit l'aide d'un mathématicien qui modélise la population de singes (en **<u>milliers</u>** d'individus) par la suite (V_n) définie par $V_0 = 1$ et $V_{n+1} = -\,0{,}025\, V_n^{\,2} + 1{,}1\, V_n$.

Soit f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = -\,0{,}025\, x^2 + 1{,}1\, x$.

On remarque alors que $V_{n+1} = f(V_n)$.

1/ Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;22]$.

2/ Démontrer, par un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a $1 \leq V_n \leq V_{n+1} \leq 4$.

3/ En déduire la convergence de la suite (V_n).

4/ Soit ℓ la limite de la suite (V_n). On admet que $\ell = f(\ell)$.

a/ Déterminer la valeur de ℓ.

b/ Interpréter cette limite dans le contexte de l'énoncé.

5/ On souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population de singes dépassera les 3000 individus. Compléter **<u>sur l'énoncé</u>** la fonction ci-dessous en Python pour qu'elle réponde au problème.

```
def pop() :
    N = …
    V = …
    while      …     :
        V = …
        N = …
    return …
```