20TDS1

Exercice 1

Partie A

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} -5n^2 = -\infty$

et par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

C'est donc une forme indéterminée du type $-\infty + \infty$.
Pour lever l'indétermination, on factorise par la plus forte puissance de n : $n - 5n^2 = n^2\left(\frac{1}{n} - 5\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}-5\right) = -5\end{array}\right\} \text{ donc par produit, } \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$$

réponse C

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

$+5 \geqslant -5\sin(n) \geqslant -5$

$-5 \leq -5\sin(n) \leq 5$

$n-5 \leq n - 5\sin(n) \leq n+5$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n-5) = +\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

réponse A

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1) = +\infty$ donc par inverse $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

$$\frac{3n+1}{n^2+2} = \frac{n(\;\;+\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{2}{n^2})} = \frac{1}{n}\,\frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}$$

$$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3+\frac{1}{n}\right) = 3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n^2}\right) = 1\end{array}\right\} \text{ donc par produit et quotient, } \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n+1}{n^2+2} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$ réponse B

4) $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} -3\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 0$

réponse B

5) $1{,}5 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}5^n = +\infty$

donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} -2 \times 1{,}5^n = -\infty$

et par comparaison $\lim\limits_{n\to-\infty} B_n = -\infty$ réponse C

Exercice 1
Partie B

1/ Un groupe de 4 personnes choisies dans un ensemble E de 15 personnes est une partie à 4 éléments parmi 15.
Le nombre de parties à 4 éléments parmi 15 est $\binom{15}{4}$ Réponse B

2/ Il y a 5 chiffres impairs $E = \{1;3;5;7;9\}$
Un nombre entier d'exactement 5 chiffres est un 5-uplet d'éléments de E.
Il y en a 5^5 Réponse A

3/ Soit E l'ensemble des 27 personnes. Le choix d'un président, un trésorier, un secrétaire, un vice-président correspond à un 4-uplet d'éléments distincts de E.
Il y en a $27 \times 26 \times 25 \times 24$ Réponse D

4/ Une anagramme est une permutation des lettres de MATH.
Il y en a $4!$. Réponse D

5/ Une poignée de mains correspond à une partie à 2 éléments de l'ensemble E des 18 personnes.
Le nombre de parties à 2 éléments est $\binom{18}{2}$. Réponse C

Exercice 2

1) 15% des poissons meurent donc le nombre de poissons qui survivent est $0,85 u_n$
On ajoute 45 nouveaux poissons en fin d'année
donc le nombre de poissons l'année suivante est $\underline{0,85 u_n + 45}$

2) Soit la propriété $P(n)$ $u_n = -100 \times 0,85^n + 300$

• Initialisation $u_0 = 200$ et $-100 \times 0,85^0 + 300 = 200$
donc $u_0 = -100 \times 0,85^0 + 300$.

• Hérédité - Supposons que pour un certain entier k on ait
$u_k = -100 \times 0,85^k + 300$
Montrons qu'alors $u_{k+1} = -100 \times 0,85^{k+1} + 300$

D'après la définition de la suite : $u_{k+1} = 0,85 u_k + 45$
Or d'après l'hypothèse de récurrence
on a $u_k = -100 \times 0,85^k + 300$.
On remplace dans la définition : $u_{k+1} = 0,85(-100 \times 0,85^k + 300) + 45$
$u_{k+1} = -100 \times 0,85^{k+1} + 255 + 45$
$u_{k+1} = -100 \times 0,85^{k+1} + 300$

• Conclusion : $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -100 \times 0,85^n + 300}$

3) $u_{n+1} - u_n = -100 \times 0,85^{n+1} + 300 - (-100 \times 0,85^n + 300)$
$u_{n+1} - u_n = -100 \times 0,85^n \times 0,85 + \cancel{300} + 100 \times 0,85^n - \cancel{300}$
$u_{n+1} - u_n = 100 \times 0,85^n (-0,85 + 1)$
$u_{n+1} - u_n = 100 \times 0,85^n \times 0,15$
$\underline{u_{n+1} - u_n = 15 \times 0,85^n \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

$15 > 0$
$0,85^n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\}$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$
$u_{n+1} > u_n$
La suite (u_n) est $\underline{\text{croissante}}$.

4) $u_n = -100 \times 0,85^n + 300$ $\quad -1 < 0,85 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,85^n = 0$
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -100 \times 0,85^n = 0$
donc par somme $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 300}$

5) • La suite (u_n) est croissante, donc il y a de plus en plus de poissons
• $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 300$ donc le nombre de poissons tendra vers 300.

Exercice 3

Partie A Etude d'un premier modèle

Au début, en 2020 donc pour $n=0$ on a $u_0 = 1$ (milliers)

1) la population augmente de 4% par an donc le nombre est multiplié par 1,04.

$u_{n+1} = 1{,}04\, u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) La suite (u_n) est géométrique | de 1er terme $u_0 = 1$ | de raison $q = 1{,}04$

$u_n = u_0 \times q^n$ d'où $u_n = 1{,}04^n$

3) $1{,}04 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

4) le modèle ne convient pas puisque la limite étant $+\infty$, au bout d'un certain nombre d'années, la population selon ce modèle dépasse 4 qui est le nombre maximal de milliers de singes sur l'île.

Partie B Etude d'un second modèle

1) f est défini et dérivable sur $[1 ; +\infty[$

$f'(x) = -2 \times 0{,}025x + 1{,}1$

$f'(x) = -0{,}05x + 1{,}1$

$-0{,}05x + 1{,}1 > 0$

$1{,}1 > 0{,}05x$

$\frac{1{,}1}{0{,}05} > x$

$22 > x$

x	1		22
signe de f'		+	0
sens de variation de f	1,075	$\nearrow$	12,1

$f(1) = 1{,}075$

$f(22) = 12{,}1$

f est strictement croissante sur $[1 ; 22]$

2) Soit la propriété $P(n)$: $1 \leq V_n \leq V_{n+1} \leq 4$

- Initialisation $V_0 = 1$

  $V_1 = f(1) = 1{,}075$ donc $1 \leq V_0 \leq V_1 \leq 4$

- Hérédité On suppose que pour un certain entier k on a :

  $1 \leq V_k \leq V_{k+1} \leq 4$

  $f(1) \leq f(V_k) \leq f(V_{k+1}) \leq f(4)$ car f est croissante sur $[1 ; 22]$

  $1{,}075 \leq V_{k+1} \leq V_{k+2} \leq 4$

  donc $1 \leq V_{k+1} \leq V_{k+2} \leq 4$

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq V_n \leq V_{n+1} \leq 4$

3) La relation $1 \leq V_n \leq V_{n+1} \leq 4$ montre que la suite (V_n) est croissante. D'autre part elle montre qu'elle est majorée. Conclusion : D'après le théorème de la convergence d'une suite monotone, on peut affirmer que (V_n) converge.

4) a) Puisque $\ell = f(\ell)$ alors ℓ est une solution de l'équation $x = f(x)$.
Résolvons sur $[1 ; 4]$ cette équation (puisqu'on a prouvé que $1 \leq V_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$x = f(x)$
$x = -0{,}025x^2 + 1{,}1x$
$0 = -0{,}025x^2 + 0{,}1x$
$0 = x(-0{,}025x + 0{,}1)$
$x = 0$ ou $-0{,}025x + 0{,}1 = 0$
$0{,}1 = 0{,}025x$
$\frac{0{,}1}{0{,}025} = x$
$4 = x$

La seule solution sur $[1 ; 4]$ est $x = 4$. Donc $\underline{\ell = 4}$

b) Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 4$ alors selon ce modèle, la population de singes sur l'île tendra vers 4000 individus.

5)
```
def pop():
    N = 0
    V = 1
    while V <= 3:
        V = -0.025*(V**2) + 1.1*V
        N = N+1
    return N
```