DEVOIR DE MATHEMATIQUES

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ DE TERMINALE

Session 2021 DS n°2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et **un seul** des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toutes les traces de recherche, même incomplètes ou non fructueuses, qu'il aura développées.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Ce sujet comporte 8 pages.
Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

EXERCICE 1 Commun à tous les candidats **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.
b. La suite (w_n) converge vers 1.
c. La suite (u_n) est minorée par 1.
d. La suite (w_n) est croissante.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\text{e}^{x^2}$.
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 2x\text{e}^{x^2}$
b. $f'(x) = (1+2x)\text{e}^{x^2}$
c. $f'(x) = \left(1+2x^2\right)\text{e}^{x^2}$
d. $f'(x) = \left(2+x^2\right)\text{e}^{x^2}$.

3. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$?

a. -1 **b.** 0 **c.** $\frac{1}{2}$ **d.** $+\infty$.

4. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1~;~1]$ telle que

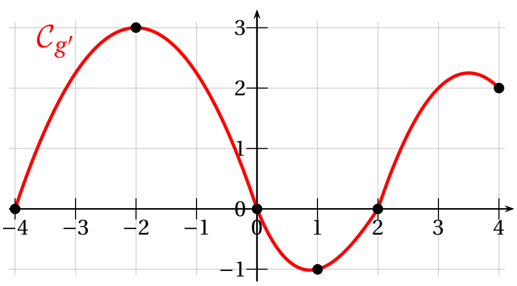
$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1~;~0]$.
b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1~;~1]$.
c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0;1]$ tel que $h(a) = 1$.
d. L'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1~;~1]$.

5. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4~;~4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.
On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.
b. g est croissante sur l'intervalle $[1;2]$.
c. g est convexe sur l'intervalle $[1;2]$.
d. g admet un minimum en 0.



EXERCICE 2 commun à tous les candidats **5 points**

Le tournoi des 6 nations est un tournoi de rugby où s'affrontent les équipes d'Angleterre, d'Ecosse, de France, du Pays de Galle, d'Irlande et d'Italie. Chaque équipe affronte les cinq autres une seule fois.

1. Lors d'un match, le stade contenait 80 000 spectateurs, dont 52 000 Français. Il y avait 11 180 femmes anglaises et 38 700 hommes français.

Les spectateurs étaient soit de nationalité française soit de nationalité anglaise sans double nationalité.

a. Combien d'hommes étaient présents au stade ?

b. Des journalistes désirent interroger deux spectateurs pris au hasard à la sortie du match. Calculer la probabilité que les deux personnes interrogées soient deux hommes français ou deux hommes anglais. Arrondir le résultat à 10^{-2} près.

2. Calculer le nombre de matchs qui ont été disputés lors de ce tournoi des 6 nations.

3. **a.** Chaque équipe est classée selon ses performances à la fin du tournoi sans qu'il y ait d'ex-aequo. Calculer le nombre de classements différents qui peuvent se produire.

b. Calculer le nombre de classements différents avec la France à la $4^{ième}$ place sachant qu'il n'y a pas d'ex-aequo.

4. On demande au sélectionneur de l'équipe de France d'assister à une réunion avec les arbitres et cinq de ses joueurs. Il décide d'amener 5 joueurs pris parmi les 15 joueurs qui ont débuté le dernier match.

a. Calculer le nombre de groupes de 5 joueurs que peut composer le sélectionneur.

b. Il décide d'amener le joueur qui est le capitaine de l'équipe. Combien de groupes de 5 joueurs peut-il alors composer ?

5. On a représenté ci-dessous la $15^{ième}$ ligne du triangle de Pascal issue d'une feuille de calcul d'un tableur.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
15	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	

a. On saisit 1 dans la cellule A16. Quelle formule, destinée à être recopiée vers la droite, peut-on saisir dans la cellule B16 afin d'obtenir la plage de cellules de B16 à P16 ?

b. Parmi toutes les cellules de la feuille de calcul, quelle cellule donne le résultat de la question 4.a. ?

6. On considère le programme ci-dessous écrit en Python :

```python
def fac(n):
    f=1
    for i in range(1,n+1):
        f=f*i
    return f
```

a. Expliquer le rôle de la fonction fac.

b. Que faut-il donner comme valeur au paramètre n de la fonction fac pour qu'elle donne le résultat de la question 3.a. ?

EXERCICE 3 commun à tous les candidats **5 points**

Quand cela est nécessaire, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.

PARTIE A

Pour mieux cerner le profil de ses clients, une banque réalise un sondage qui permet d'établir que :

- 53 % de ses clients ont plus de 50 ans;
- 32 % de ses clients sont intéressés par des placements dits risqués;
- 25% de ses clients de plus de 50 ans sont intéressés par des placements dits risqués.

On choisit au hasard un client de cette banque et on considère les événements suivants :
A : « le client a plus de 50 ans ».
R : « le client est intéressé par des placements risqués ».

1. Donner $P(A)$, $P(R)$ et $P_A(R)$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Montrer que la probabilité que le client ait plus de 50 ans et soit intéressé par des placements dits risqués est $0,1325$.
4. Sachant que le client est intéressé par des placements dits risqués, quelle est la probabilité qu'il ait plus de 50 ans?
5. Calculer $P(\bar{A} \cap R)$ puis en déduire $P_{\bar{A}}(R)$.
6. Calculer la probabilité qu'un client qui n'est pas intéressé par des placements dits risqués ait moins de 50 ans.

PARTIE B

L'une des agences de cette banque charge ses conseillers de proposer un placement dit risqué R_1, à tous ses clients. Elle promet à ses conseillers une prime de 150 € s'ils parviennent en un mois, à convaincre au moins 10 clients d'effectuer ce placement.

Elle ajoutera une prime supplémentaire de 150 € s'ils parviennent, en un mois, à convaincre au moins 15 clients d'effectuer ce placement.

L'une des conseillères de cette banque, reçoit 45 clients ce mois-ci. On admet que la probabilité qu'elle réussisse à placer ce produit auprès de l'un de ses clients est de $0,23$ et que la décision d'un client est indépendante de celles des autres clients.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de clients qui effectuent ce placement R_1 pendant le mois.

1. Préciser la loi de probabilité suivie par X ainsi que ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que cette conseillère place le produit R_1 auprès de 10 clients ce mois-ci.
3. Montrer que la probabilité qu'elle obtienne exactement 150 € de prime est environ $0,532$.
4. Calculer la probabilité qu'elle obtienne 300 € de prime.

PARTIE C

Combien de clients la conseillère doit-elle recevoir pour que la probabilité qu'au moins un de ses clients prenne le placement R_1 soit supérieure ou égale à $0,99$?

EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B. Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B. Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

EXERCICE A **5 points**

Principaux domaines abordés
Logarithme, dérivation, convexité, limites.

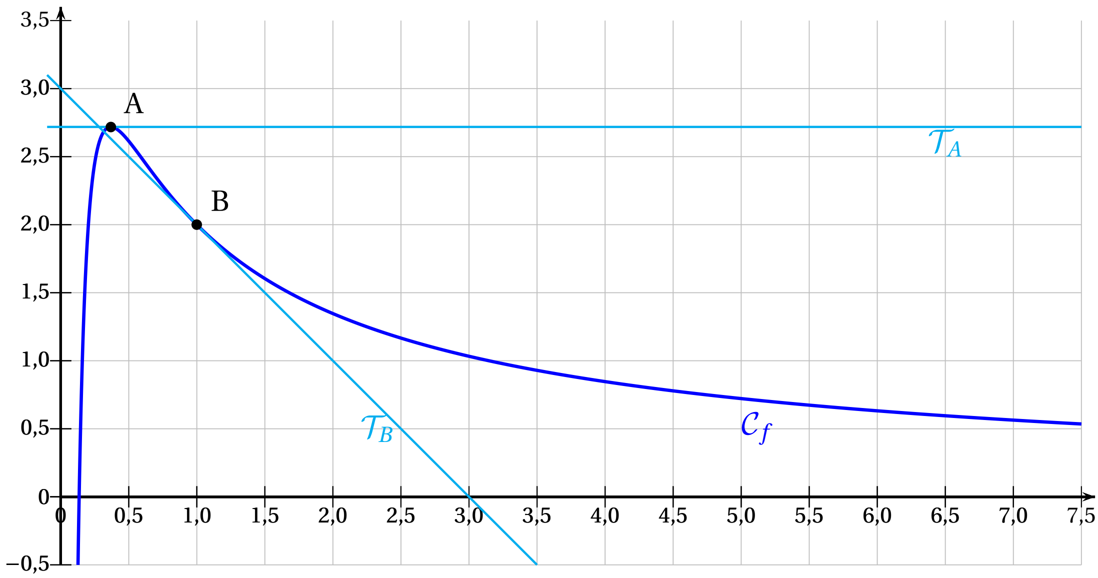
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

— la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$;

— la tangente $\mathcal{T}_A$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;\,\mathrm{e}\right)$;

— la tangente $\mathcal{T}_B$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;\,2)$.

La droite $\mathcal{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathcal{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;\,0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,3)$.



PARTIE A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ et de $f'(1)$.

2. En déduire une équation de la droite $\mathcal{T}_B$.

PARTIE B

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}.$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point que l'on précisera.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1-\ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations complet de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f.
On admet que, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{1+2\ln(x)}{x^3}.$$

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

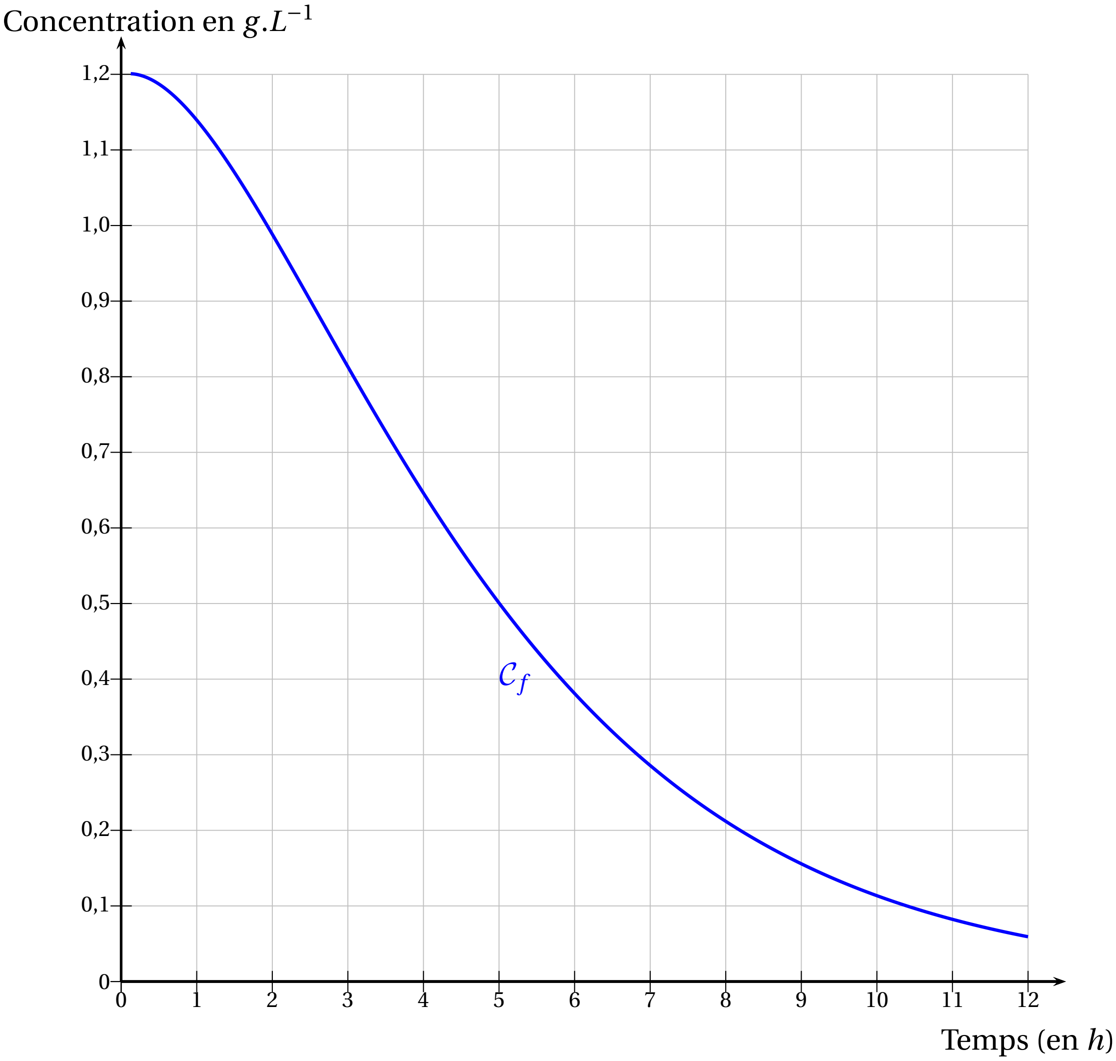
EXERCICE B **5 points**

Principaux domaines abordés
Exponentielle, dérivation, sens de variation.

Un groupe de chercheurs étudie l'élimination d'un médicament dans le sang.
Pour cela, ils l'injectent par intraveineuse à un patient volontaire puis mesurent, pendant 24 h, la concentration de médicament dans le sang du patient (en gramme par litre).

— A l'instant initial, c'est à dire sitôt après l'injection, cette concentration est de 1,2 gramme par litre ($g.L^{-1}$) ;

— Puis, pour les 12 premières heures, la concentration est modélisée par la courbe ci-dessous.



PARTIE A : Lecture graphique

1. Quelle semble être, en $g.L^{-1}$, la concentration du médicament dans le sang du patient au bout de 2 heures ? Répondre par lecture graphique.
2. Pour que le patient ait le droit de conduire, il faut que la concentration du médicament soit inférieure à 0,4 gramme par litre.
   A partir de combien de temps après l'instant initial la personne peut-elle prendre le volant ? Justifier graphiquement la réponse.

PARTIE B : Modélisation

On admet que l'on peut modéliser cette situation par une fonction f.
Si t désigne le temps en heure, la concentration en gramme par litre $f(t)$ à l'instant t est donnée par :

$$f(t) = (0,5t + b)e^{-0,4t}$$

pour tout $t \in [0 ; 24]$.

1. En utilisant la concentration dans le sang à l'instant initial, vérifier que $f(t) = (0,5t + 1,2)e^{-0,4t}$.
2. Déterminer la concentration au bout de 5 h en utilisant ce modèle (donner la valeur exacte et la valeur arrondie au dixième).
3. On appelle f' la dérivée de f.
   Montrer que $f'(t) = (-0,2t + 0,02)e^{-0,4t}$.
4. Etudier le sens de variation de f sur $[0 ; 24]$ et interpréter le résultat obtenu.
5. En utilisant ce modèle, et à l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien d'heures après l'instant initial la concentration devient inférieure à 0,06 gramme par litre.

PARTIE C : Prise d'initiative

On admet que la vitesse d'élimination du médicament par l'organisme est donnée par

$$v(t) = (0,2t - 0,02)e^{-0,4t}$$

pour tout $t \in [0 ; 24]$.

Les chercheurs ont démontré que cette vitesse d'élimination commence à décroitre 2h 36 min après l'injection. Justifier cette affirmation.