2o tds2

Exercice 1

1) a) $u_n = 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n$ donc u_n n'est pas de la forme $u_0 \times q^n$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

b) $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq w_n \leq v_n$
donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$

Réponse B

2) $f(x) = x e^{x^2}$ Posons $u(x) = x$ et $v(x) = e^{x^2}$

$u'(x) = 1$ $v'(x) = 2x e^{x^2}$

$f'(x) = (1)(e^{x^2}) + (x)(2x e^{x^2})$

$f'(x) = e^{x^2}(1+2x^2)$

Réponse C

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2-2x+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 2\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On transforme l'écriture en factorisant en haut et en bas le monôme de plus haut degré.

$$\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1} = \frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 2\end{array}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1} = \frac{1}{2}$

Réponse C

4) a) h n'est pas nécessairement croissante sur $[-1;0]$. Par exemple :

b) h n'est pas nécessairement positive sur $[-1;1]$ (voir ce dessin)

c) h est continue sur $[0;1]$, $h(0) = 2$
$h(1) = 0$ $1 \in [h(1); h(0)]$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 1$ a au moins une solution.

Réponse C

5) Le signe de la dérivée g' donne les variations de g

x	-4		0		2		$+4$
signe de g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

a) g n'a pas de maximum en $x = -2$

b) g n'est pas croissante sur $[1;2]$

c) sur $[1;2]$ g' est croissante
Donc g y est convexe.

Réponse C

Exercice 2 :

1) Pour plus de facilité, on peut remplir le tableau suivant :
Il y a deux entrées : le genre et la nationalité.

genre \ nationalité	Française	Anglaise	TOTAL
Femmes	13300	11180	24480
Hommes	38700	16820	55520
TOTAL	52000	28000	80000

Par soustraction et par addition on complète les cellules du tableau.

a) Ce qui permet de voir que 55520 hommes étaient présents

b) • Probabilité que la 1ère personne soit un homme français $p(HF) = \frac{38700}{80000}$
Comme les nombres sont grands, on assimile à un tirage avec remise.
• Probabilité que la 2e personne soit un homme français $p(HF) = \frac{38700}{80000}$
Donc la probabilité d'avoir deux français est $p(HF) \times p(HF)$

• Probabilité que la 1ère personne soit un homme anglais $p(HA) = \frac{16200}{80000}$

• Probabilité que la 2e personne soit un homme anglais $p(HA) = \frac{16200}{80000}$
Donc la probabilité d'avoir deux anglais est $p(HA) \times p(HA)$

Finalement, la probabilité que les deux personnes soient deux hommes français ou deux hommes anglais : $\boxed{(p(HF))^2 + (p(HA))^2 = 0,28}$

2) Pour un match, il y a une combinaison de 2 parmi 6 équipes
le nombre de matchs est égal au nombre de combinaisons $\binom{6}{2} = 15$

3) a) Pour la 1ère place il y a 6 possibilités, pour la 2e il y a 5 possibilités restantes, pour la 3e place il y a 4 possibilités restantes etc...
Au total il y a $6 \times 5 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$ classements
(nombre de permutations de 6 éléments)

b) La France étant à la 4e place, le nombre de permutations pour les cinq places restantes est $5!$ Il y a 120 classements

4) a) Le nombre de groupes de 5 joueurs parmi 15 est $\binom{15}{5} = 3003$

b) Le sélectionneur doit choisir 4 joueurs parmi 14 qui ne sont pas le capitaine ce qui fait $\binom{14}{4} = 1001$ choix possibles

5) a) On utilise la relation du triangle de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
Ainsi en cellule B16 on saisit la formule $= A15 + B15$

b) Le résultat de la question 4) a est sur la ligne qui correspond à la valeur de $n = 15$ et $k = 5$
D'après l'énoncé la ligne pour $n = 14$ est la 15e ligne du tableau
Par exemple en cellule B15 on a $\binom{14}{1} = 14$ donc $n = 14$, $k = 1$

On en déduit qu'en cellule F16 on a $\binom{15}{5}$

(Voir la feuille de calcul ci-après).

		k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9	k=10	k=11	k=12	k=13	k=14	k=15
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
n=0	1	1															
n=1	2	1	1														
n=2	3	1	2	1													
n=3	4	1	3	3	1												
n=4	5	1	4	6	4	1											
n=5	6	1	5	10	10	5	1										
n=6	7	1	6	15	20	15	6	1									
n=7	8	1	7	21	35	35	21	7	1								
n=8	9	1	8	28	56	70	56	28	8	1							
n=9	10	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
n=10	11	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
n=11	12	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
n=12	13	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
n=13	14	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1		
n=14	15	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
n=15	16	**1**	**15**	**105**	**455**	**1365**	$\boxed{\textbf{3003}}$	**5005**	**6435**	**6435**	**5005**	**3003**	**1365**	**455**	**105**	**15**	**1**

la cellule F16 contient $\binom{15}{5}$

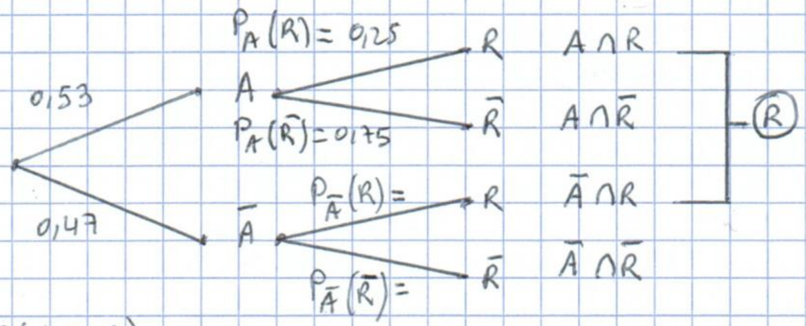
6) a) A chaque tour de boucle for, la variable f qui est initialisée à 1, est multipliée par i qui prend les valeurs de 1 à n+1 (non compris).
Donc f vaut $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ en sortie de boucle.
Autrement dit la fonction fac calcule factorielle n.

b) Il faut donner à n la valeur 6 pour calculer 6!

Exercice 3

A) 1) $P(A) = 0,53$
$P(R) = 0,32$
$P_A(R) = 0,25$

2)



3) On cherche $P(A \cap R)$
On a $P(A \cap R) = P(A) \times P_A(R)$ $\quad$ $\underline{P(A \cap R) = 0,53 \times 0,25 = 0,1325}$

4) On cherche $P_R(A)$
on a
$$P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} \quad P(R) = 0,32 \text{ donc } P_R(A) = \frac{0,1325}{0,32} = \underline{0,414}$$

5) $P(\bar{A} \cap R) = P(R) - P(A \cap R)$
$P(\bar{A} \cap R) = 0,32 - 0,1325$ $\quad$ $P(\bar{A} \cap R) = \underline{0,1875}$

Déduction de $P_{\bar{A}}(R)$: On sait que $P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(R) = P(\bar{A} \cap R)$
d'où $P_{\bar{A}}(R) = \dfrac{P(\bar{A} \cap R)}{P(\bar{A})}$
$P_{\bar{A}}(R) = \dfrac{0,1875}{0,47} = \underline{0,399}$

6) On cherche $P_{\bar{R}}(\bar{A}) = \dfrac{P(\bar{A} \cap \bar{R})}{P(\bar{R})}$

- $P(\bar{A} \cap \bar{R}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{R}) = 0,47 \times (1 - P_{\bar{A}}(R)) = 0,47 \times (1 - 0,399)$
$= \underline{0,28247}$
- $P(\bar{R}) = 1 - P(R) = 1 - 0,32 = \underline{0,68}$

$\dfrac{0,28247}{0,68} = 0,415$ $\quad$ $\underline{P_{\bar{R}}(\bar{A}) = 0,415}$

B) 1) Les entretiens que la conseillère mène auprès de ses 45 clients est une succession d'épreuves indépendantes à deux issues :
- succès "le client effectue le placement R_1" avec la probabilité $\underline{p = 0,23}$
- échec "le client ne fait pas le placement" avec la probabilité $q = 1 - p$
$\underline{q = 0,77}$

X compte le nombre k de succès parmi $n = 45$. Donc X suit la loi binomiale $\underline{\mathcal{B}(45\,;\,0,23)}$

2) $P(X = 10) = \binom{45}{10} \times 0,23^{10} \times 0,77^{35}$ $\quad$ $\underline{P(X = 10) = 0,141}$

3) Elle obtient 150 € de prime lorsque $10 \leq X \leq 14$
A la calculatrice $P(X \leq 14) - P(X \leq 9) = \underline{0,532}$

4) Elle obtient 300 € de prime lorsque $P(X \geq 15)$
$P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 14) = \underline{0,075}$

C) Elle reçoit n clients. On cherche n pour que $P(X \geq 1) \geq 0,99$
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ $\quad$ $P(X = 0)$ est la probabilité d'avoir n échecs
$P(X \geq 1) = 1 - 0,77^n$ On cherche n tel que $1 - 0,77^n \geq 0,99$
$1 - 0,99 \geq 0,77^n$ $\quad$ $0,77^n \leq 0,01$ $\quad$ $\ln(0,77^n) \leq \ln(0,01)$
$n \ln(0,77) \leq \ln(0,01)$ $\quad$ $n \geq 18$

Exercice 4 A

Partie A :

1) $f'(\frac{1}{e})$ est le coefficient directeur de la tangente T_A. $f'(\frac{1}{e})=0$

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T_B. $f'(1)=-1$

2) T_B a pour équation $y=mx+p$ avec $m=f'(1)$
$y=-x+p$

T_B passe par le point $B(1;2)$ donc $2=-(1)+p$
$2+1=p$ $p=3$

D'où T_B a pour équation $y=-x+3$

Partie B : $f(x)=(2+\ln(x))/x$

1) • $f(\frac{1}{e})=(2+\ln(\frac{1}{e}))/(\frac{1}{e})$ $f(\frac{1}{e})=(2-\ln(e))e=e$

Donc $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(\frac{1}{e};e)$

• $f(1)=(2+\ln(1))/1$
$f(1)=2$

Donc $\mathcal{C}_f$ passe par le point $B(1;2)$

• Soit C le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses. L'ordonnée de C est égale à 0 donc son abscisse x est solution de l'équation $f(x)=0$

$$\frac{2+\ln(x)}{x}=0$$

$2+\ln(x)=0$ et $x\neq 0$ $\ln(x)=-2$ $x=e^{-2}$

La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $C(e^{-2};0)$

2) Limite de f en 0^+ $f(x)=\frac{2+\ln(x)}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}(2+\ln(x))=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+} x=0^+\end{array}\right\}$$ donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$

Limite de f en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(2+\ln(x))=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty\end{array}\right\}$$ donc Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$

On écrit autrement $f(x)$: $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{\ln(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ et on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

Exercice 4A

Partie B (suite)

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 2 + \ln(x)$ $\quad v(x) = x$

$u'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad v'(x) = 1$

donc $f'(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)x - (2+\ln(x))(1)}{x^2}$

$f'(x) = \dfrac{1 - 2 - \ln(x)}{x^2}$ $\qquad$ $f'(x) = \dfrac{-1 - \ln(x)}{x^2}$

4) Etude du signe de $f'(x)$.

- Pour étudier le signe de $-1 - \ln(x)$ résolvons par exemple

$-1 - \ln(x) > 0$

$-1 > \ln(x)$

$e^{-1} > x$

- $x^2 > 0$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[$ d'où le tableau de variations de f

x	0		$e^{-1} \approx 0{,}37$		$+\infty$
signe de $-1-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	
signe de x^2	‖	$+$		$+$	
signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

5) Pour savoir où f est convexe, il faut connaître le signe de $f''(x) = \dfrac{1 + 2\ln(x)}{x^3}$

- Pour étudier le signe de $1 + 2\ln(x)$ résolvons par exemple

$1 + 2\ln(x) > 0$

$1 > -2\ln(x)$

$-\dfrac{1}{2} < \ln(x)$

$e^{-\frac{1}{2}} < x$

d'où le tableau de signes de f'' :

x	0		$e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}61$		$+\infty$
signe de $1+2\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
signe de x^3	‖	$+$		$+$	
signe de f''	‖	$-$	0	$+$	

f est convexe lorsque $f''(x) \geqslant 0$

Donc f est convexe sur $[e^{-\frac{1}{2}} ; +\infty[$

Exercice 4B

Partie A

1) Au bout de 2h la concentration semble être $\underline{1\,g.L^{-1}}$

2) La courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la droite d'équation $y = 0,4$ pour $\geq 5,8$.
Donc le patient a le droit de conduire à partir de $\underline{5,8\,h}$

Partie B

1) à $t = 0h$ $f(t) = 1,2$

$$(0,5t + b)\,e^{-0,4t} = 1,2$$
$$(0,5(0) + b)\,e^{-0,4(0)} = 1,2$$
$$b\;e^{0} = 1,2$$
$$b = 1,2 \quad \text{d'où } \underline{f(t) = (0,5t + 1,2)\,e^{-0,4t}}$$

2) à $t = 5h$ $f(5) = (0,5(5) + 1,2)\,e^{-0,4\times 5}$

$$\underline{f(5) = 3,7e^{-2}\,g.L^{-1}} \qquad \underline{f(5) = 0,5\,g.L^{-1}}$$

3) $f(t) = u(t)\,v(t)$ avec $u(t) = 0,5t + 1,2$ $\quad v(t) = e^{-0,4t}$
$u'(t) = 0,5$ $\quad v'(t) = -0,4e^{-0,4t}$

donc $f'(t) = (0,5)(e^{-0,4t}) + (0,5t + 1,2)(-0,4e^{-0,4t})$

$$f'(t) = e^{-0,4t}\,(0,5 + (0,5t + 1,2)(-0,4))$$
$$f'(t) = e^{-0,4t}\,(0,5 - 0,2t - 0,48)$$
$$\underline{f'(t) = e^{-0,4t}\,(-0,2t + 0,02)}$$

4) Etude du signe de $f'(t)$: • On sait que $\forall t \in [0;24]$, $e^{-0,4t} > 0$
• Pour étudier le signe de $-0,2t + 0,02$ résolvons par exemple :

$$-0,2t + 0,02 > 0$$
$$0,02 > 0,2t \qquad 0,1 > t$$

t	0		0,1		24
signe de $e^{-0,4t}$		+		+	
signe de $-0,2t + 0,02$		+	0	−	
signe de $f'(t)$		+	0	−	
Variations de f		↗		↘	

Sur 24h, le maximum de concentration en $g.L^{-1}$ est atteint au bout de $\underline{0,1h}$ (12 min).

5) On cherche sur la calculatrice les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite d'équation $y = 0,06$. On trouve $\underline{t = 11,96\,h}$

A partir de 11,96h la concentration de médicament dans le sang devient inférieure à $0,06\,g.L^{-1}$

Partie C

Dans cette partie, il faut étudier les variations de la vitesse $v(t) = (0,2t - 0,02)e^{-0,4t}$.

On calcule donc sa dérivée: $v'(t) = (0,2)e^{-0,4t} + (0,2t - 0,02) \times -0,4e^{-0,4t}$

$$v'(t) = 0,2e^{-0,4t} + (0,2t - 0,02)(-0,4)e^{-0,4t}$$
$$v'(t) = 0,2e^{-0,4t} + (-0,08t + 0,008)e^{-0,4t}$$
$$v'(t) = (0,2 - 0,08t + 0,008)e^{-0,4t}$$
$$v'(t) = (-0,08t + 0,208)e^{-0,4t}$$

• Etude du signe de $v'(t)$:

Pour connaître le signe de $-0,08t + 0,208$, résolvons l'inéquation:

$$-0,08t + 0,208 > 0$$
$$0,208 > 0,08t$$
$$\frac{0,208}{0,08} > t$$
$$2,6 > t$$

D'où le tableau de variations de v:

t	0		2,6		24
signe de $-0,08t + 0,208$		+	0	−	
signe de $e^{-0,4t}$		+		+	
signe de $v'(t)$		+	0	−	
variations de v		↗		↘	

D'après ce tableau, la vitesse d'élimination décroît à partir de 2,6 h

Or 0,6 h = 0,6 × 60 min
0,6 h = 36 min
et 2,6 h = 2h 36 min. Donc <u>les chercheurs ont raison.</u>