BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Session 2021 – DS n° 3

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Le candidat traite **4 exercices :** les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et **un seul** des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

EXERCICE 1 : commun à tous les candidats (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

PARTIE I

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale.
Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 97% des adresses ; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses.
Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses.
On admet que X suit la loi binomiale de paramètres *n = 9* et *p = 0,03.*

1) La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :

a. 0 b. 1 c. 0,24 d. 0,76

2) La probabilité qu'exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :

a. $\binom{9}{2} \times 0{,}97^2 \times 0{,}03^7$ b. $\binom{7}{2} \times 0{,}97^2 \times 0{,}03^7$

c. $\binom{9}{2} \times 0{,}97^7 \times 0{,}03^2$ d. $\binom{7}{2} \times 0{,}97^7 \times 0{,}03^2$

3) La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :

a. $P(X < 1)$ b. $P(X \leq 1)$ c. $P(X \geq 2)$ d. $1 - P(X = 0)$

PARTIE II

Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules blanches, indiscernables au toucher.
On tire au hasard successivement et **sans remise** deux boules de l'urne.

On considère les évènement suivants :

- V_1 : « la première boule tirée est verte »
- B_1 : « la première boule tirée est blanche »
- V_2 : « la seconde boule tirée est verte »
- B_2 : « la seconde boule tirée est blanche »

4) La probabilité de V_2 sachant que V_1 est réalisé, notée $P_{V_1}(V_2)$, est égale à :

a. $\frac{5}{8}$ b. $\frac{4}{7}$ c. $\frac{5}{14}$ d. $\frac{20}{56}$

5) La probabilité de l'événement V_2 est égale à :

a. $\frac{5}{8}$ b. $\frac{5}{7}$ c. $\frac{3}{28}$ d. $\frac{9}{7}$

EXERCICE 2 : commun à tous les candidats (5 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, **on admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1.

a. Calculez u_1 et v_1.

b. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \geq 1$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a: $u_n \geq n + 1$.

d. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{{u_n}^2}.$$

a. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}.$$

b. En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{{u_n}^2}.$$

c. Déterminer la limite de la suite $({r_n}^2)$ et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.

d. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

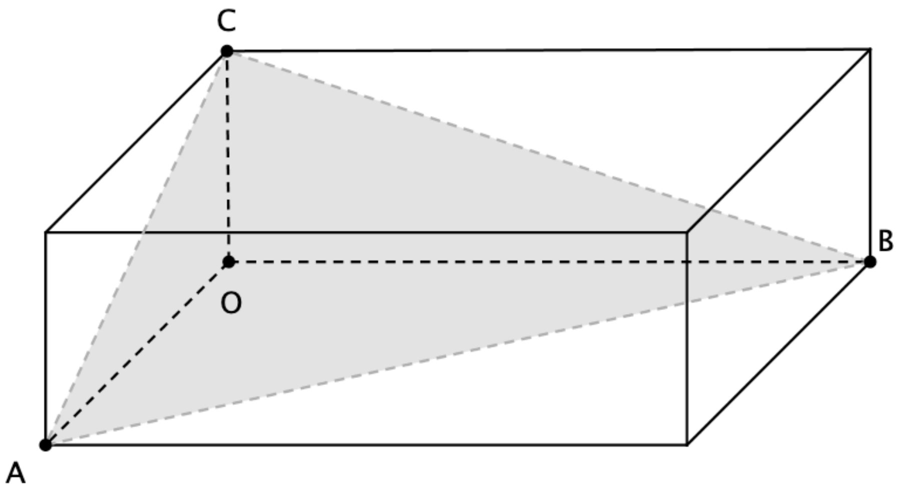
```
def seuil():
    n=0
    r=1
    while abs(r-sqrt(2))>10**(-4) :
        r=(2+r)/(1+r)
        n=n+1
    return n
```

(`abs` désigne la valeur absolue, `sqrt` la racine carrée et `10**(-4)` représente 10^{-4})

La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.
À quoi correspond-elle ?

EXERCICE 3 : commun à tous les candidats (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
A de coordonnées (2 ; 0 ; 0), B de coordonnées (0 ; 3 ; 0) et C de coordonnées (0 ; 0 ; 1).



L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1) a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.

2) On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
   b. Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49} ; \frac{12}{49} ; \frac{36}{49}\right)$.
   c. Calculer la distance OH.

3) On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

   En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

*Le candidat doit traiter **un seul des deux exercices** A ou B.*

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A (5 points)

Principaux domaines abordés
Équations différentielles
Fonction exponentielle ; suites

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225°C.
On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.
On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[\,0\,;\,+\infty[$.
Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four.
Ainsi $f(0,5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.
Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25°C.
On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1) a. Préciser la valeur $f(0)$.
   b. Résoudre l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.
   c. En déduire que pour tout réel $t \geq 0$, on a : $f(t) = 200\,e^{-6t} + 25$.

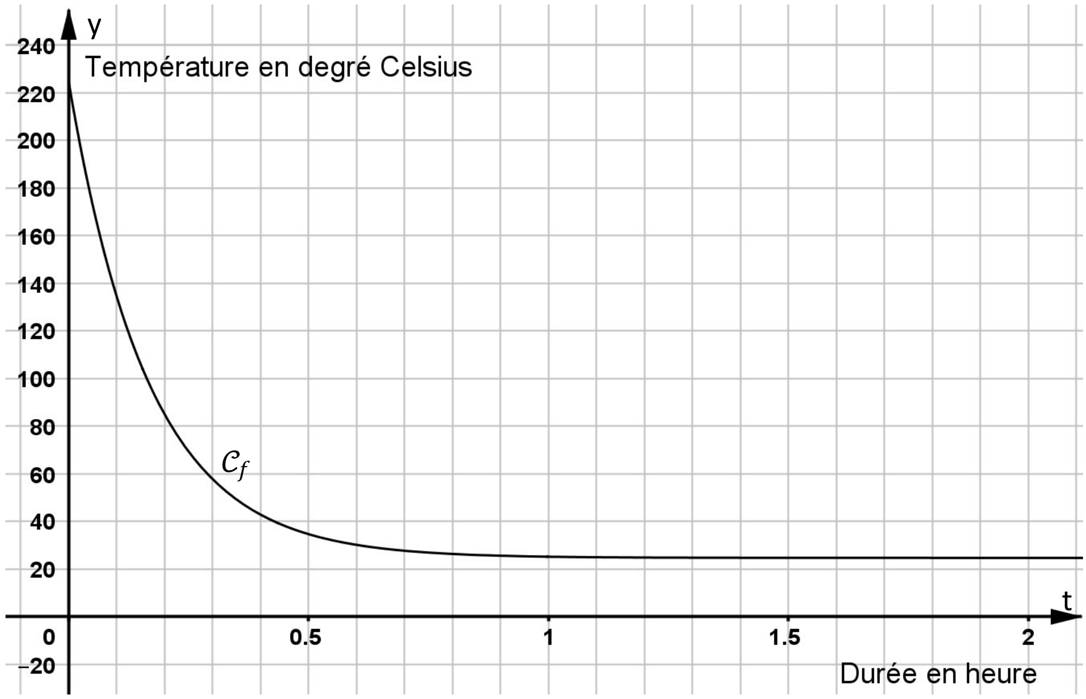
2) Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :
   - décroît ;
   - tend à se stabiliser à la température ambiante.

   La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?

3) Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution dans $[\,0\,;\,+\infty[$.

   Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40°C. On note T_0 le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.
   On donne en page suivante la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.

4) Avec la précision permise par le graphique, lire T_0. On donnera une valeur approchée de T_0 sous forme d'un nombre entier de minutes.



5) On s'intéresse ici à la diminution, minute après minute, de la température d'une baguette à sa sortie du four.
Ainsi, pour un entier naturel n, D_n désigne la diminution de température en degré Celsius d'une baguette entre la n-ième et la $(n+1)$-ième minute après sa sortie du four.

On admet que, pour tout entier naturel n : $D_n = f\left(\frac{n}{60}\right) - f\left(\frac{n+1}{60}\right)$.

a) Vérifier que 19 est une valeur approchée de D_0 à 0,1 près, et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

b) Vérifier que l'on a, pour tout entier naturel n : $D_n = 200\,e^{-0,1n}\,(1 - e^{-0,1})$.
En déduire le sens de variation de la suite (D_n), puis la limite de la suite (D_n).
Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'exercice ?

Exercice B (5 points)

Principaux domaines abordés
Fonction logarithme ; dérivation.

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \ln(x) + 2x - 2$.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et 0.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0;+\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$.
4. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g sur $]0;+\infty[$.

Partie II : Étude d'une fonction *f*

On considère la fonction f, définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1)$.

1. **a.** On admet que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' sa dérivée.
   Démontrer que, pour tout x de $]0;+\infty[$, on a :
   $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$
   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0;+\infty[$. Le calcul des limites n'est pas demandé.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie III : Étude d'une fonction *F* admettant pour dérivée la fonction *f*

On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur $]0;+\infty[$ dont la dérivée F' est la fonction f. Ainsi, on a : $F' = f$.
On note $\mathcal{C}_F$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.

1. Étudier les variations de F sur $]0;+\infty[$.
2. La courbe représentative $\mathcal{C}_F$ de F admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ? Justifier la réponse.