20 TDS3

Partie 1

1) On calcule $P(X=0)$ à la calculatrice sachant que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(9\,;\,0{,}03)$. On trouve $0{,}76$

D

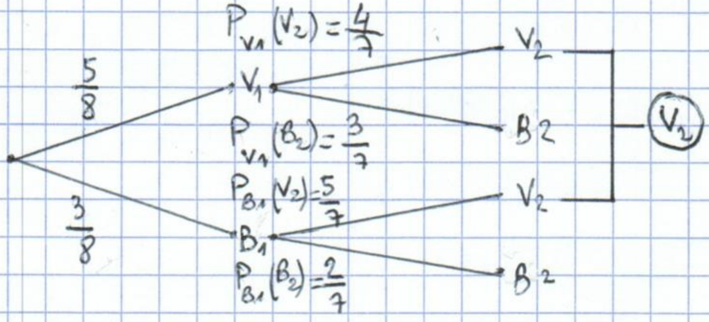
2) $P(X=2) = \binom{9}{2} p^2 q^7$ $\qquad P(X=2) = \binom{9}{2}\, 0{,}03^2 \times 0{,}97^7$ **C**

3) $P(X=0)$ est la probabilité qu'aucune adresse ne soit illisible.
$1-P(X=0)$ est la probabilité de l'événement contraire "au moins une des adresses est illisible"

D

Partie II

On peut représenter la situation par un arbre :



4) $P_{V_1}(V_2) = \frac{4}{7}$ **B**

5) $P(V_2) = P(V_1 \cap V_2) + P(B_1 \cap V_2)$

$P(V_2) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(V_2)$

$P(V_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7}$ $\qquad P(V_2) = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$ **A**

Exercice 2

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par $\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) $u_1 = u_0 + v_0$
$u_1 = 1 + 1 = \underline{2}$

$v_1 = 2u_0 + v_0$
$v_1 = 2(1) + 1 = \underline{3}$

b) Montrons que la suite (v_n) est strictement croissante.
Cela revient à montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} > v_n$

On sait que $v_{n+1} = 2u_n + v_n$

On admet que (u_n) est strictement positive (énoncé).

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_n > 0$

$$2u_n + v_n > v_n$$

$$v_{n+1} > v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Conclusion : la suite (v_n) est <u>strictement croissante</u>.

<u>Conséquence</u> du sens de variation de (v_n) :

- le premier terme de (v_n) est $v_0 = 1$
- la suite (v_n) est strictement croissante

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad v_n \geqslant v_0$
$\underline{v_n \geqslant 1}$

Ainsi la suite (v_n) est minorée par 1.

c) Soit P_n la propriété $u_n \geqslant n+1$ où $n \in \mathbb{N}$
Démontrons cette propriété par récurrence.

- Initialisation : $u_0 = 1$ et $0+1=1$
donc $u_0 \geqslant 0+1$
P_n est ainsi vraie au rang $n=0$

- Hérédité :
Supposons que pour un certain entier naturel k, on ait $u_k \geqslant k+1$
Montrons qu'alors
$u_{k+1} \geqslant k+2$

$u_k \geqslant k+1$
$u_k + v_k \geqslant k+1+v_k$ en ajoutant le réel v_k aux deux membres
(1) $u_{k+1} \geqslant k+1+v_k$

Or $v_k \geqslant 1$ d'après la propriété démontrée à la question 1) b)
donc $k+1+v_k \geqslant k+1+1$ en ajoutant le réel $k+1$ aux deux membres
(2) $k+1+v_k \geqslant k+2$

En rapprochant les inégalités (1) et (2) on peut déduire que
$u_{k+1} \geqslant k+2$
Ainsi l'hérédité est démontrée.

- Conclusion : La propriété $u_n \geqslant n+1$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) On a $u_n \geqslant n+1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$
donc par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1$
donc
$$-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}$$

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} X^2 = +\infty\end{array}\right\}$ donc, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty$

Donc, par inverse $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{u_n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n^2} = 0$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$

c) On a $r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n^2 = 2$
u_n et v_n étant positifs, r_n l'est aussi donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \sqrt{2}$

d) $r_{n+1} = \dfrac{v_{n+1}}{u_{n+1}}$

Or $v_{n+1} = u_n + v_n$

et $u_{n+1} = 2u_n + v_n$

donc $r_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{u_n + v_n}$

En divisant le numérateur et le dénominateur par le réel u_n (pour amener r_n) on a :

$$r_{n+1} = \dfrac{\dfrac{2u_n + v_n}{u_n}}{\dfrac{u_n + v_n}{u_n}}$$

$$r_{n+1} = \dfrac{\dfrac{2u_n}{u_n} + \dfrac{v_n}{u_n}}{\dfrac{u_n}{u_n} + \dfrac{v_n}{u_n}}$$

$$r_{n+1} = \dfrac{2 + r_n}{1 + r_n}$$

e) $n = 5$ est le rang (le premier) tel que la distance entre r_n et $\sqrt{2}$ soit inférieure ou égale à 10^{-4}.

Exercice 3

1) a) $\vec{AB}\begin{pmatrix}0-2\\3-0\\0-0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}0-2\\0-0\\1-0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$

$\vec{AB}\cdot\vec{n} = (-2)(3)+(3)(2)+(0)(6) = 0$ donc $\vec{AB}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux

$\vec{AC}\cdot\vec{n} = (-2)(3)+(0)(2)+(1)(6) = 0$ donc $\vec{AC}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux

De plus $(\vec{AB},\vec{AC})$ est une base du plan (ABC) (puisque $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires) donc $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

b) (ABC) a donc pour équation $3x+2y+6z+d=0$

$A(2,0,0) \in (ABC)$ donc $3(2)+2(0)+6(0)+d=0$

$6+d=0$

$d=-6$

Donc (ABC) a pour équation $\underline{3x+2y+6z-6=0}$

2) a) d a comme vecteur directeur $\vec{n}$ et passe par $O(0;0;0)$.
Donc d a comme représentation paramétrique:

$$\begin{cases}x = 0+3t\\ y = 0+2t\\ z = 0+6t\end{cases}, t\in\mathbb{R} \qquad \begin{cases}x = 3t\\ y = 2t\\ z = 6t\end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

b) les coordonnées du point d'intersection H de d avec (ABC) vérifient simultanément:

$$\begin{cases}x=3t\\ y=2t\\ z=6t\\ 3x+2y+6z-6=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=3t\\ y=2t\\ z=6t\\ 3(3t)+2(2t)+6(6t)-6=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=3t\\ y=2t\\ z=6t\\ 9t+4t+36t-6=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=3t\\ y=2t\\ z=6t\\ 49t=6\end{cases} \qquad \begin{cases}x=\frac{18}{49}\\ y=\frac{12}{49}\\ z=\frac{36}{49}\\ t=\frac{6}{49}\end{cases}$$ donc $\underline{H\left(\frac{18}{49};\frac{12}{49};\frac{36}{49}\right)}$

c) $\vec{OH}\begin{pmatrix} 18/49 \\ 12/49 \\ 36/49 \end{pmatrix}$

$OH = \|\vec{OH}\|$

$OH = \sqrt{\frac{18^2}{49^2} + \frac{12^2}{49^2} + \frac{36^2}{49^2}}$

$OH = \frac{1}{49}\sqrt{18^2 + 12^2 + 36^2}$

$OH = \frac{1}{49}\sqrt{1764}$ $\qquad OH = \frac{42}{49}$

$\underline{OH = \frac{6}{7} \simeq 0,857}$

3) $V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABC} \times OH$ en considérant | la base : triangle ABC
| la hauteur : [OH]

ou avec une 2e formule :

$V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{OAC} \times OB$ en considérant | la base : triangle OAC
| la hauteur : [OB]

$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(2 \times 1) \times 3$

$V = 1$

En revenant à la première formule :

$1 = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABC} \times \frac{6}{7}$

$3 = \mathcal{A}_{ABC} \times \frac{6}{7}$ d'où $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{21}{6}$ $\qquad \underline{\mathcal{A}_{ABC} = \frac{7}{2}}$

Exercice 4 A

1) a) $f(0) = 225$

b) $y' = -6y - 150$

C'est une équation différentielle du type $y' = ay + b$

avec $\begin{cases} a = -6 \\ b = 150 \end{cases}$ $\quad -\frac{b}{a} = -\frac{150}{-6} = \frac{150}{6} = 25$

Les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 25 + ke^{-6t}$

c) $f(0) = 225$ équivaut successivement à

$25 + ke^{-6(0)} = 225$

$ke^{0} = 200$

$k = 200$

Donc la solution vérifiant la condition initiale est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $\underline{f(t) = 25 + 200e^{-6t}}$

2) • Etude du sens de variation de f.

f est dérivable sur $[0; +\infty[$

$f'(t) = -1200e^{-6t}$ $\quad \left.\begin{array}{l} -1200 < 0 \\ e^{-6t} > 0 \quad \forall t \in [0; +\infty[\end{array}\right\}$ donc $f'(t) < 0$

Donc f est décroissante sur $[0; +\infty[$

• $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to +\infty} -6t = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0 \end{array}\right\}$ donc par composition $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-6t} = 0$

donc par produit et par somme $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 25$

Donc la température tend à se stabiliser vers la température ambiante.

Conclusion : f fournit un modèle en accord avec les observations.

3) • f est continue sur $[0; +\infty[$
• f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$
• $40 \in]\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) ; f(0)]$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$.

4) D'après le graphique, $T_0 = 0{,}42$ h

$T_0 = 0{,}42 \times 60 \approx 25$ min

5) a) $D_0 = f\left(\frac{0}{60}\right) - f\left(\frac{1}{60}\right)$ $\quad D_0 \approx 225 - 205{,}967$

$D_0 \approx 19{,}033$ La chute de température est $19°$/min à la $1^{ère}$ min.

b) $D_n = 200e^{-6 \times \frac{n}{60}} + 25 - \left(200e^{-6 \times \frac{n+1}{60}} + 25\right)$

$D_n = 200\left(e^{-\frac{6n}{60}} - e^{-\frac{6(n+1)}{60}}\right)$ $\quad D_n = 200\left(e^{-0{,}1n} - e^{-0{,}1n - 0{,}1}\right)$

$D_n = 200e^{-0{,}1n}\left(1 - e^{-0{,}1}\right)$

- On remarque que la suite (D_n) est définie par une fonction de n.

Posons $D_n = g(n)$ avec $g(x) = 200\,e^{-0{,}1x}(1-e^{-0{,}1})$

Etudions le sens de variation de g.
g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$
Calculons sa dérivée

$$g'(x) = 200 \times -0{,}1\, e^{-0{,}1x}(1-e^{-0{,}1})$$

$$\left.\begin{array}{l} 200 > 0 \\ -0{,}1 < 0 \\ e^{-0{,}1x} > 0 \quad \forall x \in [0\,;+\infty[\\ 1-e^{-0{,}1} > 0 \end{array}\right\} \text{ donc } g'(x) < 0$$

donc g est décroissante sur $[0\,;+\infty[$

Donc la suite (D_n) est décroissante.
Cela signifie que la vitesse de refroidissement diminue.
Ce résultat est prévisible, d'après la courbe de la température. Celle-ci est décroissante mais de moins en moins vite.

- <u>Limite de la suite (D_n) quand n tend vers $+\infty$</u>

$$D_n = 200\,e^{-0{,}1n}(1-e^{-0{,}1})$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} -0{,}1n = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0 \end{array}\right\} \text{ donc par composition, } \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-0{,}1n} = 0$$

et par produit, $\lim 200\,e^{-0{,}1n}(1-e^{-0{,}1}) = 0$

Cela signifie que la vitesse de refroidissement tend vers 0 au bout d'un temps très long, autrement dit la température ne varie plus.
Cela était prévisible car on a déjà vu que la température tendait à se stabiliser vers 25°C.

Exercice 4B

Partie I

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-2) = +\infty$ } donc par somme $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} (2x-2) = 0$ } donc par somme $\underline{\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty}$

2) g est dérivable sur $]0;+\infty[$

$g'(x) = \frac{1}{x} + 2$ Pour tout $x \in]0;+\infty[$ $\frac{1}{x} > 0$; $2 > 0$ } donc $g'(x) > 0$

Donc g est croissante sur $]0;+\infty[$

3) g est continue sur $]0;+\infty[$
g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
$0 \in]\lim\limits_{x\to 0} g(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)[$
Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution $\alpha \in]0;+\infty[$.

4) $g(1) = \ln(1) + 2(1) - 2 = 0$ donc $\alpha = 1$

d'où le tableau de signes de g :

x	0		$\alpha = 1$		$+\infty$
signe de $g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Partie II

1) a) $f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)\left(\ln(x) - 1\right) + \left(2 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\ln(x) - 1\right) + \left(\frac{2x-1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left[\ln(x) - 1 + 2x - 1\right]$

$\underline{f'(x) = \frac{1}{x^2}\, g(x)}$

b)

x	0		1		$+\infty$
signe de x^2	‖	$+$		$+$	
signe de $g(x)$	‖	$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$	‖	$-$		$+$	
variations de f	‖	↘	-1	↗	

2) $f(x) = 0$

$\left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 1) = 0$

$2 - \frac{1}{x} = 0$ ou $\ln(x) = 1$

$2 = \frac{1}{x}$ ou $x = e$

$x = \frac{1}{2}$ ou $x = e$ $\quad \mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2} ; e\right\}$

D'où le tableau de signes de f :

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
signe de $f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie III

1) Le sens de variation de F est donné par le signe de sa dérivée $F' = f$

Donc :

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
f	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2) La courbe $\mathcal{C}_F$ a des tangentes parallèles à l'axe des abscisses lorsque sa dérivée f s'annule.
Cela se produit deux fois : . Une fois pour $x = \frac{1}{2}$
. Une fois pour $x = e$