CHAPITRE 1 : Récurrence et suites numériques

[1 Le raisonnement par récurrence 2](#_Toc48119780)

[1.1 Le principe 2](#_Toc48119781)

[1.2 Exemple 2](#_Toc48119782)

[2 Suites monotones, majorées, minorées, bornées 3](#_Toc48119783)

[2.1 Suite monotone 3](#_Toc48119784)

[2.2 Suites majorées, minorées, bornées 9](#_Toc48119785)

[3 Limite d’une suite 13](#_Toc48119786)

[3.1 Limite finie 13](#_Toc48119787)

[3.2 Limite infinie 13](#_Toc48119788)

[3.3 Théorèmes généraux sur les limites de suites 17](#_Toc48119789)

[3.3.1 Limite d’une somme de suites 17](#_Toc48119790)

[3.3.2 Limite d’un produit de suites 17](#_Toc48119791)

[3.3.3 Limite d’un quotient de suites 17](#_Toc48119792)

[3.4 Théorème de comparaison 19](#_Toc48119793)

[3.4.1 Pour prouver qu’une suite a comme limite 19](#_Toc48119794)

[3.4.2 Pour prouver qu’une suite a comme limite -∞ 20](#_Toc48119795)

[3.5 Théorème des gendarmes pour prouver qu’une suite a pour limite *l* 21](#_Toc48119796)

[3.6 Théorème de la convergence d’une suite monotone (admis) 22](#_Toc48119797)

[3.7 Théorème : suite croissante non majorée 23](#_Toc48119798)

[3.8 Limite d’une suite de terme général *qn* 23](#_Toc48119799)

CHAPITRE 1 : Récurrence et suites numériques

# Le raisonnement par récurrence

## Le principe

*Image de l’échelle : Si je peux mettre* *le* *pied sur le barreau numéro de* *l’échelle ( est un entier naturel donné )* ***et*** *si je peux passer de n’importe quel barreau numéro* () *au barreau suivant numéro alors je peux gravir toute l’échelle à partir du barreau numéro .*

 désigne une proposition[[1]](#footnote-1) qui dépend d’un entier naturel . Soit un entier naturel.
Pour démontrer par récurrence que pour tout entier naturel , la proposition est vraie, on procède en trois étapes :

1. **Initialisation :** Vérifier que la proposition est vraie au rang .
2. **Hérédité :** On suppose que la proposition est vraie pour un entier . On montre *qu’alors* la proposition est vraie pour l’entier suivant .
3. **Conclusion :** la proposition est vraie pour tout entier .

## Exemple

***Une suite est définie par récurrence. On veut sa définition par une fonction de* .**

Soit la suite définie pour tout entier par :

Montrer que le terme général de la suite s’écrit pour tout entier .

*Réponse*

Soit la proposition  : «  pour tout entier  »

1. **Initialisation** : Montrons que est vraie pour .

D’une part, on sait que .

D’autre part, la proposition pour donne

Donc on a bien

La proposition est vraie pour .

1. **Hérédité :** On suppose que la proposition soit vraie pour un entier , c’est à dire qu’on suppose que . Montrons qu’alors est vraie pour l’entier , c’est à dire que .
* On cherche à exprimer .

D’après la définition de la suite donnée dans l’énoncé, on a :

* En utilisant l’hypothèse de récurrence[[2]](#footnote-2), on a :
* On a obtenu la proposition écrite au rang
1. **Conclusion :** la proposition  : est vraie pour tout entier .

# Suites monotones, majorées, minorées, bornées

## Suite monotone

***Définition :***

Une suite est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante, autrement dit, si elle ne change pas de sens de variation.



Exemple de suite ***non monotone***

La suite définie pour tout par :

Méthodes pour étudier le sens de variation d’une suite

Pour étudier le sens de variation d’une suite , on peut :

* Etudier le signe de *un+1* – *un* pour tout entier naturel *n*.

Le signe de la différence donne le sens de variation de la suite .

***Exemple :***

Etudier le sens de variation de la suite définie pour tout par :

*Réponse :*

Pour étudier le signe de cette expression, on la met sous la forme de produits et de quotients de facteurs :

 donc

Conclusion :

La suite est monotone croissante.

***Remarque :***

Cette méthode peut être utilisée pour les suites définies par une fonction de ou pour les suites définies par récurrence.

* Etudier le sens de variation de la fonction *f* sur [0 ; +∞[

**Si la suite est définie au moyen d’une** **fonction de variable** , alors le sens de variation de la suite est le même que celui de la fonction.

***Exemple :***

Etudier le sens de variation de la suite définie pour tout par :

*Réponse :*

 en posant la fonction définie sur par .

 est la somme et le quotient de fonctions dérivables sur et le dénominateur ne s’annule pas sur , donc est dérivable sir .

Pour tout , . Donc la fonction est croissante.



Conclusion :

La suite est monotone croissante

![C:\Documents and Settings\HP_Propriétaire\Local Settings\Temporary Internet Files\Content.IE5\E763WEUX\MC900411320[1].wmf]() **Si la suite est définie au moyen d’une** **relation de récurrence** cette méthode ne peut pas être utilisée.

***Exemple :***

Les suites et définies pour tout respectivement par :

 et

ont-elles le même sens de variation ?

*Réponse*

En calculant les premiers termes de , on a :



En calculant les premiers termes de , on a :



Conclusion : Bien que les deux suites et soient définies en utilisant la même fonction racine carrée (strictement croissante sur ), elles n’ont pas le même sens de variation.

![C:\Documents and Settings\HP_Propriétaire\Local Settings\Temporary Internet Files\Content.IE5\E763WEUX\MC900411320[1].wmf]() Donc le sens de variation d’une suite définie par n’est pas toujours le même que le sens de variation de la fonction .

* Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, comparer un+1 / un avec 1

***Exemple :***

Etudier le sens de variation de la suite :

* On montre d’abord que tous les termes de la suite sont strictement positifs.

Soit la proposition  : «  pour tout

1. **Initialisation** : Montrons que est vraie pour .

On sait que .

Donc on a bien

La proposition est vraie pour .

1. **Hérédité :** On suppose que la proposition soit vraie pour un entier , c’est à dire qu’on suppose que . Montrons qu’alors est vraie pour l’entier , c’est à dire que .
* On cherche à exprimer .

D’après la définition de la suite donnée dans l’énoncé, on a :

* En utilisant l’hypothèse de récurrence[[3]](#footnote-3), on a :

Or

Donc

D’où

* On a obtenu la proposition écrite au rang
1. **Conclusion :** la proposition  : est vraie pour tout entier .
* Comparons maintenant et

Puisqu’on a démontré *au préalable* que quel que soit , on a :

(L’ordre est conservé lorsqu’on multiplie ou divise les deux membres d’une inégalité par un réel strictement positif)

Conclusion : La suite est monotone croissante

![C:\Documents and Settings\HP_Propriétaire\Local Settings\Temporary Internet Files\Content.IE5\E763WEUX\MC900411320[1].wmf]() ***Remarque***

Par cette même méthode, on peut montrer que tout suite géométrique de **premier terme strictement positif** est :

* Monotone croissante lorsque
* Monotone décroissante lorsque

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

* Utiliser un raisonnement par récurrence

Pour utiliser la récurrence, on doit d’abord conjecturer le sens de variation.

***Exemple :***

Etudier le sens de variation de la suite définie pour tout entier naturel par :

*Réponse*

* On calcule pour pouvoir conjecturer le sens de variation de la suite.

Donc on conjecture la suite est monotone croissante.

* Démonstration par récurrence du sens de variation

Soit la proposition , .

1. **Initialisation** : Montrons que est vraie pour .

On sait que  et que .

Donc on a bien

La proposition est vraie pour .

1. **Hérédité :** On suppose que la proposition soit vraie pour un entier , c’est à dire qu’on suppose que . Montrons qu’alors est vraie pour l’entier , c’est à dire que

Ou encore que

* On cherche à exprimer et en fonction, respectivement de et

D’après la définition de la suite donnée dans l’énoncé, on a :

et d’après la définition de la suite donnée dans l’énoncé, on a aussi : c'est-à-dire

* En utilisant l’hypothèse de récurrence, on a :

Or la fonction carrée est strictement croissante sur et puisque[[4]](#footnote-4) ,

Donc

D’où

* On a obtenu la proposition écrite au rang
1. **Conclusion :** la proposition  : , est vraie pour tout entier .

Conclusion : La suite est monotone croissante.

## Suites majorées, minorées, bornées

* Suites majorées

***Définition :***

La suite est **majorée** s’il existe un réel , tel que pour tout , .



***Exemple de suite*** ***majorée***

La suite définie pour tout par :

est majorée par

* Suites minorées

***Définition :***

La suite est **minorée** s’il existe un réel , tel que pour tout , .



***Exemple de suite*** ***minorée***

La suite définie pour tout par :

est minorée par

* Suites bornées

***Définition :***

La suite est **bornée** s’il existe des réels , tels que pour tout , .

Une suite est bornée lorsqu’elle est à la fois majorée et minorée.



***Exemple de suite*** ***bornée***

La suite définie pour tout par :

est bornée par et

***Autres exemples :*** Les suites de terme général ou sont bornées par -1 et 1.

Méthodes pour étudier la majoration ou la minoration d’une suite

Pour démontrer qu’une suite est majorée par ou minorée par ou bornée , on peut :

* Etudier le signe de *un – M* (ou de *un – m*)

***Exemple 1 :***

Montrer que la suite définie pour tout par :

est majorée par

*Réponse*

On calcule puis on étudie son signe :

Conclusion : La suite est majorée par

***Exemple 2 :***

Montrer que la suite définie pour tout par :

est minorée par

*Réponse*

On calcule puis on étudie son signe :

Conclusion : La suite est minorée par

* Chercher un encadrement de *un* en travaillant sur des inégalités.

***Exemple :***

Montrer que la suite définie pour tout par  est bornée.

*Réponse :* On part de l’encadrement de puis on arrive à un encadrement de .

Conclusion :

La suite est bornée par et

* Etudier le sens de variation de la suite (*un*)
	+ Si la suite est croissante pour tout , alors la suite est **minorée par son premier terme**.



***Exemple :***

Démontrer que la suite définie pour tout par :

est minorée par

*Réponse :*

On montre d’abord que la suite est monotone croissante (voir la démonstration au paragraphe 4.5.1)

Le premier terme est

Conclusion : La suite est minorée par

* + Si la suite est décroissante pour , alors la suite est **majorée par son premier terme**.

***Exemple :***

Démontrer que la suite définie pour tout par :

est minorée par



*Réponse :*

La suite est géométrique de premier terme strictement positif est de raison
 donc la suite est monotone décroissante. Le premier terme est .

Conclusion : La suite est majorée par

* Utiliser un raisonnement par récurrence.

***Exemple :***

Soit la suite définie sur par :

Démontrer que cette suite est majorée par

*Réponse*

Utilisons un raisonnement par récurrence pour établir la majoration de la suite

Soit la proposition , .

1. **Initialisation** : Montrons que est vraie pour .

On sait que

Donc on a bien

La proposition est vraie pour .

1. **Hérédité :** On suppose que la proposition soit vraie pour un entier , c’est à dire qu’on suppose que . Montrons qu’alors est vraie pour l’entier , c’est à dire que
* On cherche à écrire une inégalité concernant en partant de l’hypothèse de récurrence :

D’après la définition de la suite donnée dans l’énoncé, on a :

* On a obtenu la proposition écrite au rang
1. **Conclusion :** la proposition  : est vraie. est majorée par .

# Limite d’une suite

## Limite finie

***Définition :***

Soit un réel. Dire qu’une suite **a pour limite** signifie que tout intervalle ouvert contenant contient tous les termes de la suite à partir d’un certain rang. On écrit alors :

***Exemple :***

La suite définie par a pour limite .

Cela signifie que tout intervalle (l’intervalle dans l’illustration ci-dessous) contient tous les termes de la suite () à partir d’un certain rang ( dans l’exemple ci-dessous).



## Limite infinie

***Définition 1 :***

Dire qu’une suite **a pour limite**  signifie que tout intervalle , avec *A* réel , contient tous les termes de la suite à partir d’un certain rang.

***Exemple :***

La suite définie par a pour limite .

Cela signifie que tout intervalle (l’intervalle dans l’illustration ci-dessous) contient tous les termes de la suite () à partir d’un certain rang ( dans l’exemple ci-dessous).



***Définition 2 :***

Dire qu’une suite a pour limite signifie que :

***Exemple :***

La suite définie par a pour limite .

En effet : et donc



***Pas de limite***

***Exemple 1 :***

La suite définie par prend alternativement les valeurs et . Elle n’a ni limite finie ni limite infinie.



***Exemple 2 :***

La suite définie par prend alternativement des valeurs réelles entre et . Elle n’a ni limite finie ni limite infinie.



***Vocabulaire***  On dit que :

|  |  |
| --- | --- |
| Une suite de limite finie  | converge vers  |
| Une suite de limite infinie | diverge |
| Une suite qui n’a pas de limite | diverge |

***Propriétés***

* Les suites de terme général sont convergentes et leur limite est

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  définie par  |  définie par  |  définie par  |

* Les suites de terme général sont divergentes et leur limite est

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  définie par  |  définie par  |  définie par  |

* Les suites constantes convergent vers la valeur de la constante

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  définie par  |  |  |

* Si une suite converge alors sa limite est **unique**.
* Détermination d’un seuil à l’aide d’un algorithme

***Exemple :***

Soit la suite définie pour tout par :

1. Montrer que cette suite est croissante
2. Montrer que cette suite a pour limite
3. Calculer et afficher le premier rang tel que

*Réponse*

Puisque la suite est définie par une fonction de , on peut étudier le sens de variation de la fonction.

Soit la fonction définie sur par

Cette fonction présente un extremum pour

 donc l’extremum est un minimum.

Dans la fonction est croissante sur .

Il en résulte que la suite est monotone croissante.

Donc

et donc

***Déclaration des variables***

N est un entier

U est un réel

Début algorithme

N 0

U 2

Tant que U

N N+1

U 3N²+2

Fin Tant que

En Python :



## Théorèmes généraux sur les limites de suites

### Limite d’une somme de suites

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Si |  |  |  |  |  |  |
| et si |  |  |  |  |  |  |
| alors |  |  |  |  |  | ***FI[[5]](#footnote-5)*** |

***Exemple :*** Déterminer

*Réponse :*  et donc, par somme,

### Limite d’un produit de suites

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Si |  | ou  | ou  | ou  | ou  |  |
| et si |  |  |  |  |  |  ou  |
| alors |  |  |  |  |  | ***FI*** |

***Exemple :*** Déterminer

*Réponse :*  et donc, par produit,

### Limite d’un quotient de suites

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Si |  |  |  |  |  |  |  ou  |  |
| et si |  |  ou  |  et  |  et  |  et  |  et  |  ou  | 0 |
| alors |  | 0 |  |  |  |  | ***FI*** | ***FI*** |

***Exemple :*** Déterminer . *Réponse :*  et donc,

***Cas d’indétermination***

Il y a 4 cas d’indétermination

Dans ces cas, il faut modifier l’écriture de pour permettre l’utilisation des théorèmes.

***Exemple :*** Déterminer . *Réponse :*

* On a et donc on est en présence de la forme indéterminée
* On modifie l’écriture de , en cherchant par exemple à factoriser l’expression :
* On étudie la limite de chaque facteur :

 et

* Donc, par produit :

Conclusion :

***Limite en l’infini d’une suite définie par une fonction polynôme***

La limite **en l’infini** d’une fonction polynôme[[6]](#footnote-6) est égale à la limite en l’infini de son monôme de plus haut degré. Il en est donc de même pour une suite définie par une fonction polynôme.

***Exemple :***

 Donc

***Limite en l’infini d’une suite définie par une fonction rationnelle***

La limite **en l’infini** d’une fonction rationnelle[[7]](#footnote-7) est égale à la limite du quotient de ses monômes de plus haut degré. Il en est donc de même pour une suite définie par une fonction rationnelle.

***Exemple :***

## Théorème de comparaison

### Pour prouver qu’une suite a comme limite

Soient et deux suites telles que, à partir d’un certain rang , .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Si  |  | alors |  |  |

***Exemple :***

Etudier la convergence de la suite définie pour tout par

*Réponse*:

Les théorèmes sur les opérations sur les limites ne permettent pas de répondre puisque la suite définie par n’a pas de limite.

Mais on peut utiliser la comparaison de la suite avec une suite qu’on définit pour tout entier naturel par

En effet,  :

Or, , et par somme,

Donc, d’après le théorème de comparaison,

***Illustration graphique :***



***Démonstration : Divergence vers d’une suite minorée par une suite de limite***

* Par définition, si , alors il existe un entier naturel tel que pour tout entier naturel *, .*
* De plus, par hypothèse il existe un entier naturel tel que pour tout entier naturel *, .*
* Soit un entier naturel supérieur ou égal à et . Donc pour tout , ainsi par définition de la limite  on déduit : *.*

### Pour prouver qu’une suite a comme limite -∞

Soit et deux suites telles que, à partir d’un certain rang , .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Si  |  | alors |  |  |

***Exemple :***

Etudier la convergence de la suite définie pour tout entier naturel par

*Réponse :*

On définit la suite pour tout entier naturel par

 :

Or, , et par somme,

Donc, d’après le théorème de comparaison,

***Illustration graphique :***



## Théorème des gendarmes pour prouver qu’une suite a pour limite *l*

Soit , et trois suites telles que, à partir d’un certain rang , .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Si  |  | et |  | alors |  |

***Exemple :***

Etudier la convergence de la suite définie pour tout entier naturel non nul par :

*Réponse :*

On définit la suite pour tout entier naturel non nul par :

et la suite pour tout entier naturel non nul par :

 :

Or, , et par produit et par somme, et

Donc, d’après le théorème des gendarmes,

***Illustration graphique :***



## Théorème de la convergence d’une suite monotone (admis)

* 1er cas : Soit une suite croissante. Si cette suite est majorée alors elle converge.

***Exemple :***

La suite définie sur par 

On montre que :

* est croissante
* est majorée par (par exemple)

On conclut que *d’après le théorème de la convergence d’une suite monotone*, la suite a une limite finie.

* 2ème cas : Soit une suite décroissante. Si cette suite est minorée alors elle converge.

***Exemple :***

La suite définie sur par 

On montre que :

* est décroissante
* est minorée par (par exemple)

On conclut que *d’après le théorème de la convergence monotone*, la suite a une limite finie.

![MC900411320[1]]() Le théorème de la convergence monotone permet d’assurer qu’une suite converge. Mais il ne donne pas la valeur de la limite.

## Théorème : suite croissante non majorée

Soit une suite croissante. Si cette suite n’est pas **majorée**, alors elle diverge vers .



***Démonstration :*** Soit *A* un réel.

* La suite n’est pas majorée donc il existe un entier tel que .
* De plus , la suite est croissante , donc tous ses termes , à partir du rang sont supérieurs à *A* et sont donc dans l’intervalle

Donc tout intervalle du type contient tous les termes de la suite à partir d’un certain rang (qui est ). Donc, par définition de la limite +, la suite tend vers +.

De même, on démontre que :

Soit une suite décroissante. Si cette suite n’est pas **minorée**, alors elle diverge vers .

## Limite d’une suite de terme général *qn*

***Propriété :***

Soit la suite définie sur par avec .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Si la valeur du réel est telle que … |  |  |  |  |
| Alors  | n’existe pas |  |  |  |

***Illustration :***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Démonstration : dans le cas où q >1.***

🟋 Démontrons d’abord, par récurrence, le résultat préliminaire suivant :

On appelle la propriété à démontrer.

*Initialisation*: pour .

D’une part,

D’autre part,

Donc on a

La proposition est vraie.

*Hérédité*: On admet que pour l’entier naturel , la proposition est vraie soit :

Démontrons qu’alors la proposition l’est aussi :

Les propositions suivantes sont équivalentes :

Or,

Donc

Ainsi la proposition est héréditaire.

*Conclusion* : est vraie tout entier naturel

pour tout réel et pour tout entier naturel est **l’inégalité de Bernoulli** (nommée ainsi en référence à Jacques Bernoulli, mathématicien suisse 1654 – 1705).

Ainsi, par exemple,

**Conséquence :**

***Application :*** Etude de la limite de lorsque  :

 🟋Comme alors on peut poser avec α >0.

Ainsi, la propriété démontrée s’écrit :

On calcule les limites :

D’où, en utilisant le théorème de comparaison :

1. **Proposition** : Enoncé susceptible d’être vrai ou faux. [↑](#footnote-ref-1)
2. **L’hypothèse de récurrence :** c’est la supposition que la proposition est vraie pour un entier *k* [↑](#footnote-ref-2)
3. **L’hypothèse de récurrence :** c’est la supposition que la proposition est vraie pour un entier *k* [↑](#footnote-ref-3)
4. Ceci serait facilement démontré par récurrence, dans un résultat préliminaire. [↑](#footnote-ref-4)
5. Dans certains cas, ces théorèmes ne nous permettent pas de prévoir le résultat. Ces cas sont appelés *FORMES INDETERMINEES (FI)*. [↑](#footnote-ref-5)
6. **Polynôme** Un polynôme est une s[omme](http://paquito.amposta.free.fr/glosss/somme.htm) de [monômes](http://paquito.amposta.free.fr/glossm/monome.htm).
Une fonction polynôme est une [fonction](http://paquito.amposta.free.fr/glossf/fonction.htm) de la forme $x⟼a\_{n}x^{n}+a\_{n-1}x^{n-1}+…+a\_{1}x+a\_{0}$, où $a\_{n},a\_{n-1}, …a\_{1},a\_{0}$ sont des [réels](http://paquito.amposta.free.fr/glossr/reel.htm) donnés et $n$ un [entier naturel](http://paquito.amposta.free.fr/glossn/naturel.htm) appelé le [degré](http://paquito.amposta.free.fr/glossd/degre.htm) du polynôme lorsque $a\_{n}\ne 0$. [↑](#footnote-ref-6)
7. **Rationnelle** : Quotient de deux polynômes.
Une fonction rationnelle est une [fonction](http://paquito.amposta.free.fr/glossf/fonction.htm) de la forme $x⟼\frac{a\_{n}x^{n}+a\_{n-1}x^{n-1}+…+a\_{1}x+a\_{0}}{b\_{m}x^{m}+b\_{m-1}x^{m-1}+…+b\_{1}x+b\_{0}}$, où $a\_{n},a\_{n-1}, …,a\_{1},a\_{0}, b\_{m},b\_{m-1}, …,b\_{1},b\_{0}$ sont des [réels](http://paquito.amposta.free.fr/glossr/reel.htm) et $n$ et $m$ des [entiers naturel](http://paquito.amposta.free.fr/glossn/naturel.htm)s tels que $a\_{n}\ne 0$ et $b\_{m}\ne 0$. [↑](#footnote-ref-7)