CHAPITRE 1 : Récurrence et suites numériques

CHAPITRE 1 : Récurrence et suites numériques

1 Le raisonnement par récurrence

1.1 Le principe

<u>Image de l'échelle :</u> Si je peux mettre le pied sur le barreau numéro n_o de l'échelle (n_o est un entier naturel donné) ***et*** *si je peux passer de n'importe quel barreau numéro k ($k \geq n_0$) au barreau suivant numéro $k+1$ alors je peux gravir toute l'échelle à partir du barreau numéro n_o.*

$P(n)$ désigne une proposition[1] qui dépend d'un entier naturel n. Soit n_0 un entier naturel.
Pour démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, la proposition $P(n)$ est vraie, on procède en trois étapes :

(1) **Initialisation :** Vérifier que la proposition $P(n)$ est vraie au rang n_0.

(2) **Hérédité :** <u>On suppose</u> que la proposition $P(n)$ est vraie pour un entier $k \geq n_0$. On montre *qu'alors* la proposition $P(n)$ est vraie pour l'entier suivant $k+1$.

(3) **Conclusion :** la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

1.2 <u>Exemple</u>

Une suite est définie par récurrence. On veut sa définition par une fonction de n.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

Montrer que le terme général de la suite (u_n) s'écrit $u_n = 2^n - 1$ pour tout entier $n \geq 1$.

Réponse

Soit la proposition $P(n)$: « $u_n = 2^n - 1$ pour tout entier $n \geq 1$ »

(1) **Initialisation** : Montrons que $P(n)$ est vraie pour $n = 1$.

D'une part, on sait que $u_1 = 1$.
D'autre part, la proposition $P(n)$ pour $n = 1$ donne $u_1 = 2^1 - 1 = 1$
Donc on a bien $u_{\mathbf{1}} = 2^{\mathbf{1}} - 1$
La proposition $P(n)$ est vraie pour $n = 1$.

(2) **Hérédité :** On suppose que la proposition $P(n)$ soit vraie pour un entier $k \geq 1$, c'est à dire qu'<u>on suppose</u> que $u_{\boldsymbol{k}} = 2^{\boldsymbol{k}} - 1$. Montrons qu'alors $P(n)$ est vraie pour l'entier $k+1$, c'est à dire que $u_{\boldsymbol{k+1}} = 2^{\boldsymbol{k+1}} - 1$.

- On cherche à exprimer u_{k+1}.
  D'après la définition de la suite donnée dans l'énoncé, on a : $u_{k+1} = 2u_k + 1$

[1] **Proposition** : Enoncé susceptible d'être vrai ou faux.

- En utilisant l'hypothèse de récurrence[2], on a : $u_{k+1} = 2(2^k - 1) + 1$

$$u_{k+1} = 2^{k+1} - 2 + 1$$
$$u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$$

- On a obtenu la proposition écrite au rang $k + 1$

(3) **Conclusion :** la proposition $P(n)$: $\boldsymbol{u_n = 2^n - 1}$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

2 Suites monotones, majorées, minorées, bornées

2.1 Suite monotone

Définition :

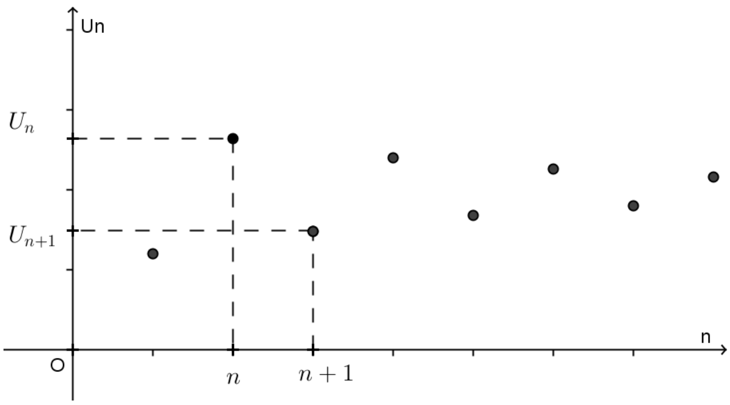
Une suite (U_n) est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante, autrement dit, si elle ne change pas de sens de variation.

Exemple de suite ***non monotone***

La suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = 2 + (-0{,}8)^n$$

$U_1 = 2 + (-0{,}8)^1 = 2 - 0{,}8$
$U_2 = 2 + (-0{,}8)^2 = 2 + 0{,}8^2$
$U_3 = 2 + (-0{,}8)^3 = 2 - 0{,}8^3$
$U_4 = 2 + (-0{,}8)^4 = 2 + 0{,}8^4$ ...



Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on peut :

- Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel *n*.

Le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$ donne le sens de variation de la suite (U_n).

Exemple :

Etudier le sens de variation de la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = 3 - \frac{3}{n}$$

Réponse :

$U_{n+1} = 3 - \dfrac{3}{n+1}$

---

[2] **L'hypothèse de récurrence :** c'est la supposition que la proposition est vraie pour un entier *k*

$$U_{n+1} - U_n = 3 - \frac{3}{n+1} - \left(3 - \frac{3}{n}\right)$$

$$U_{n+1} - U_n = 3 - \frac{3}{n+1} - 3 + \frac{3}{n}$$

$$U_{n+1} - U_n = -\frac{3}{n+1} + \frac{3}{n}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-3}{n+1} + \frac{3}{n}$$

Pour étudier le signe de cette expression, on la met sous la forme de produits et de quotients de facteurs :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-3n}{(n+1)n} + \frac{3(n+1)}{n(n+1)}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-3n + 3(n+1)}{n(n+1)}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-3n + 3n + 3}{n(n+1)}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3}{n(n+1)}$$

$Pour\ tout\ n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} 3 > 0 \\ n > 0 \\ n+1 > 0 \end{cases}$ donc

$$U_{n+1} - U_n > 0$$

$$U_{n+1} > U_n$$

<u>Conclusion :</u>
La suite (U_n) est monotone croissante.

Remarque :
Cette méthode peut être utilisée pour les suites définies par une fonction de n ou pour les suites définies par récurrence.

- Etudier le sens de variation de la fonction f sur [0 ; +∞[

Si la suite est définie au moyen d'une fonction de variable n, alors le sens de variation de la suite <u>est le même</u> que celui de la fonction.

Exemple :
Etudier le sens de variation de la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = 3 - \frac{3}{n}$$

Réponse :

$U_n = f(n)$ en posant f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 3 - \frac{3}{x}$.

f est la somme et le quotient de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ et le dénominateur ne s'annule pas sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc f est dérivable sir $]0\ ;\ +\infty[$.

$$f(x) = 3 - 3 \times \frac{1}{x}$$

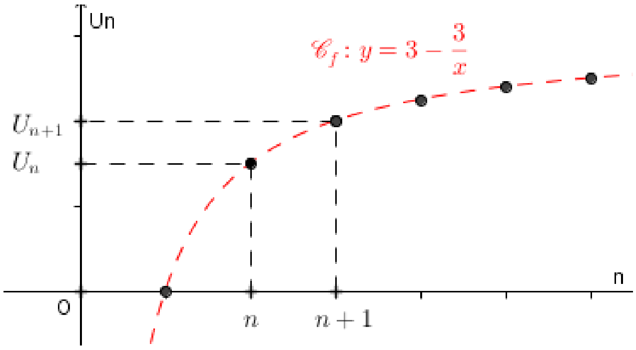
$$f'(x) = 0 - 3 \times -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{x^2}$$

Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) > 0$. Donc la fonction f est croissante.

<u>Conclusion :</u>

La suite (U_n) est monotone croissante



Si la suite est définie au moyen d'une relation de récurrence cette méthode <u>ne peut pas</u> être utilisée.

Exemple :

Les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ respectivement par :

$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_0 = 0{,}5 \\ V_{n+1} = \sqrt{V_n} \end{cases}$$

ont-elles le même sens de variation ?

Réponse

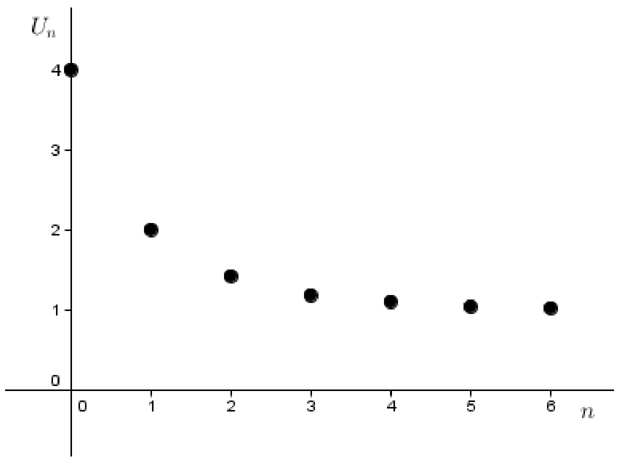
En calculant les premiers termes de (U_n), on a :

$U_0 = \mathbf{4}$

$U_1 = \sqrt{4} = \mathbf{2}$

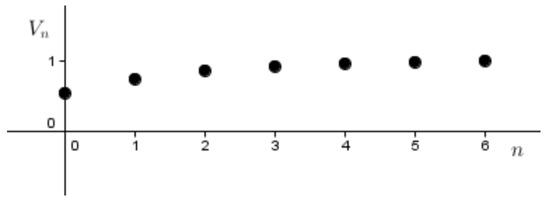
$U_2 = \sqrt{2} \approx \mathbf{1,41}$

$U_3 \approx \sqrt{1{,}41} \approx \mathbf{1,19}$



En calculant les premiers termes de (V_n), on a :

$V_0 = \mathbf{0,5}$
$V_1 = \sqrt{0,5} \approx \mathbf{0,71}$
$V_2 = \sqrt{0,71} \approx \mathbf{0,84}$
$V_3 = \sqrt{0,84} \approx \mathbf{0,92}$



<u>Conclusion :</u> Bien que les deux suites (U_n) et (V_n) soient définies en utilisant la même fonction racine carrée f (strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$), elles n'ont pas le même sens de variation.

⚠ Donc le sens de variation d'une suite définie par $U_{n+1} = f(U_n)$ n'est pas toujours le même que le sens de variation de la fonction f.

- Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, comparer u_{n+1} / u_n avec 1

Exemple :
Etudier le sens de variation de la suite :

$$(V_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} V_0 = 100 \\ V_{n+1} = 1{,}2V_n \end{cases}$$

- On montre d'abord que tous les termes V_n de la suite sont strictement positifs.

Soit la proposition $P(n)$: « $V_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(1) **Initialisation** : Montrons que $P(n)$ est vraie pour $n = 0$.

On sait que $V_0 = 100$.
Donc on a bien $\boldsymbol{V_0} > 0$
La proposition $P(n)$ est vraie pour $n = 0$.

(2) **Hérédité :** On suppose que la proposition $P(n)$ soit vraie pour un entier $k \geq 0$, c'est à dire qu'<u>on suppose</u> que $\boldsymbol{V_k} > 0$. Montrons qu'alors $P(n)$ est vraie pour l'entier $k+1$, c'est à dire que $\boldsymbol{V_{k+1}} > 0$.

- On cherche à exprimer V_{k+1}.
D'après la définition de la suite donnée dans l'énoncé, on a :$V_{k+1} = 1{,}2V_k$

- En utilisant l'hypothèse de récurrence[3], on a : $V_k > 0$

Or $1{,}2 > 0$
Donc $1{,}2 \times V_k > 0$
D'où $V_{k+1} > 0$

- On a obtenu la proposition écrite au rang $k+1$

(3) **Conclusion :** la proposition $P(n)$: $\boldsymbol{V_n} > 0$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

---

[3] **L'hypothèse de récurrence :** c'est la supposition que la proposition est vraie pour un entier *k*

- Comparons maintenant $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ et 1

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1{,}2V_n}{V_n}$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 1{,}2$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} > 1$$

Puisqu'on a démontré *au préalable* que $V_n > 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$V_n \times \frac{V_{n+1}}{V_n} > V_n \times 1$$

(L'ordre est conservé lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un réel strictement positif)

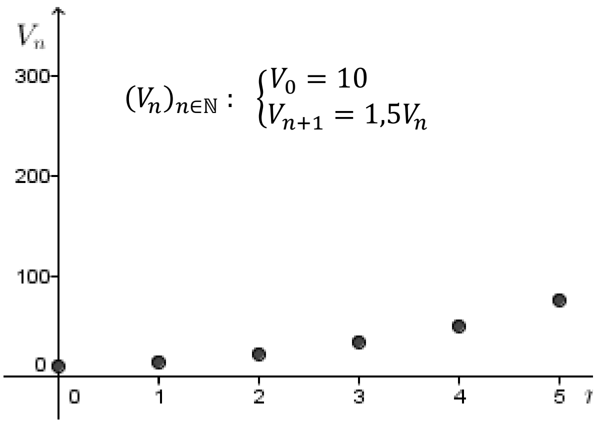
$$V_{n+1} > V_n \ \ pour\ tout\ n \in \mathbb{N}$$

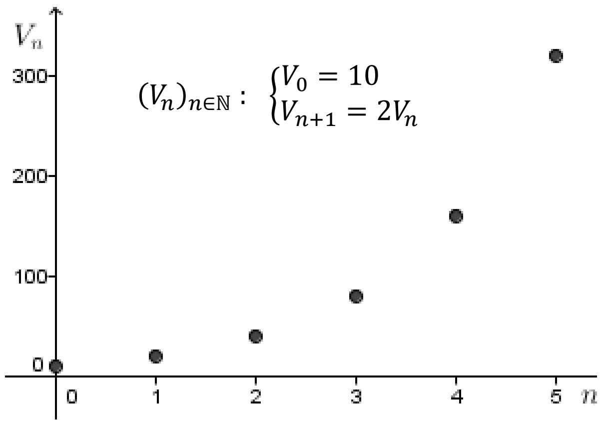
<u>Conclusion :</u> La suite (v_n) est monotone croissante

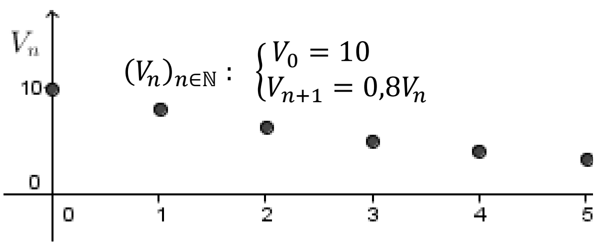
Remarque

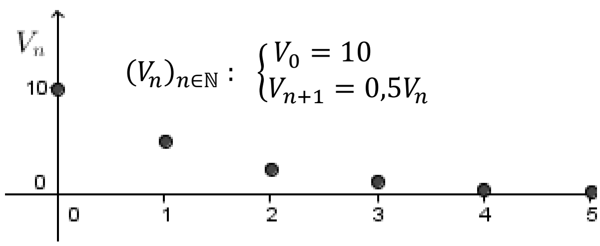
Par cette même méthode, on peut montrer que tout suite géométrique de **premier terme V_0 strictement positif** est :

- Monotone croissante lorsque $q > 1$
- Monotone décroissante lorsque $0 < q < 1$









- Utiliser un raisonnement par récurrence

Pour utiliser la récurrence, on doit d'abord conjecturer le sens de variation.

Exemple :
Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1{,}01 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 \end{cases}$$

Réponse

- On calcule u_1 pour pouvoir conjecturer le sens de variation de la suite.

$$u_1 = (u_0)^2$$
$$u_1 = 1{,}01^2$$
$$u_1 = 1{,}0201$$
$$u_1 > u_0$$

Donc on conjecture la suite (u_n) est monotone croissante.

- Démonstration par récurrence du sens de variation

Soit la proposition $P(n)$: $u_{n+1} > u_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(1) **Initialisation** : Montrons que $P(n)$ est vraie pour $n = 0$.

On sait que $u_0 = 1{,}01$ et que $u_1 = 1{,}0201$.
Donc on a bien $u_1 > u_0$
La proposition $P(n)$ est vraie pour $n = 0$.

(2) **Hérédité :** On suppose que la proposition $P(n)$ soit vraie pour un entier $k \geq 0$, c'est à dire qu'<u>on suppose</u> que $u_{\boldsymbol{k}+1} > u_{\boldsymbol{k}}$. Montrons qu'alors $P(n)$ est vraie pour l'entier $k + 1$, c'est à dire que $u_{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}+1} > u_{k+1}$
Ou encore que $u_{k+2} > u_{k+1}$

- On cherche à exprimer u_{k+2} et u_{k+1} en fonction, respectivement de u_{k+1} et u_k
D'après la définition de la suite donnée dans l'énoncé, on a : $u_{k+1} = (u_k)^2$

et d'après la définition de la suite donnée dans l'énoncé, on a aussi : $u_{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}+1} = (u_{\boldsymbol{k}+1})^2$ c'est-à-dire $u_{\boldsymbol{k}+\mathbf{2}} = (u_{\boldsymbol{k}+1})^2$

- En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a : $u_{k+1} > u_k$
Or la fonction carrée est strictement croissante sur $[0 \;;\; +\infty[$ et puisque[4] $u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

Donc $(u_{k+1})^2 > (u_k)^2$
D'où $u_{k+2} > u_{k+1}$

- On a obtenu la proposition écrite au rang $k + 1$

(3) **Conclusion :** la proposition $P(n)$: $u_{n+1} > u_n$, est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

<u>Conclusion :</u> La suite (v_n) est monotone croissante.

---

[4] Ceci serait facilement démontré par récurrence, dans un résultat préliminaire.

2.2 Suites majorées, minorées, bornées

- Suites majorées

Définition :

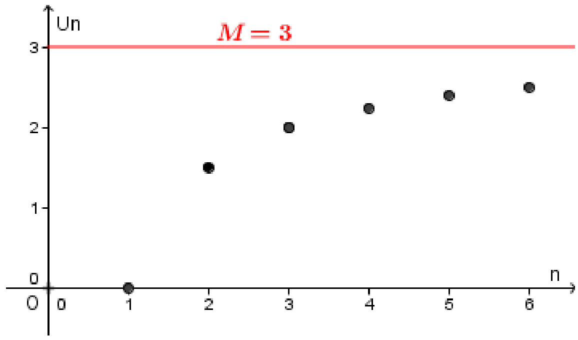
La suite (U_n) est **majorée** s'il existe un réel M, tel que <u>pour tout n</u>, $u_n \leq M$.

Exemple de suite majorée

La suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = 3 - \frac{3}{n}$$

est majorée par $M = 3$



- Suites minorées

Définition :

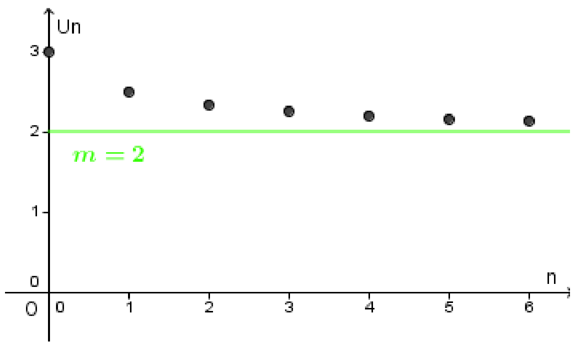
La suite (U_n) est **minorée** s'il existe un réel m, tel que <u>pour tout n</u>, $u_n \geq m$.

Exemple de suite minorée

La suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$U_n = 2 + \frac{1}{1+n}$$

est minorée par $m = 2$



- Suites bornées

Définition :

La suite (U_n) est **bornée** s'il existe des réels $m \; et \; M$, tels que <u>pour tout n</u>, $m \leq u_n \leq M$.

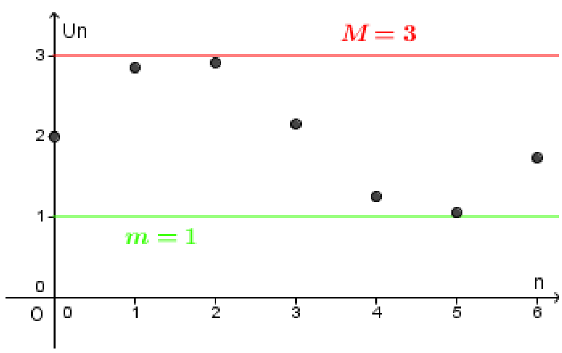
Une suite est bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple de suite bornée

La suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$U_n = 2 + \sin(n)$$

est bornée par $m = 1$ et $M = 3$



Autres exemples : Les suites de terme général $\cos(n)$ ou $(-1)^n$ sont bornées par -1 et 1.

Méthodes pour étudier la majoration ou la minoration d'une suite

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est majorée par M ou minorée par m ou bornée , on peut :

- Etudier le signe de $u_n - M$ (ou de $u_n - m$)

Exemple 1 :

Montrer que la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = 3 - \frac{3}{n}$$

est majorée par $M = 3$

Réponse

On calcule $U_n - 3$ puis on étudie son signe :

$$U_n - 3 = 3 - \frac{3}{n} - 3$$

$$U_n - 3 = -\frac{3}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{3}{n} > 0$$

$$-\frac{3}{n} < 0$$

$$U_n - 3 < 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad U_n < 3$$

<u>Conclusion :</u> La suite (U_n) est majorée par 3

Exemple 2 :

Montrer que la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$U_n = 2 + \frac{1}{1+n}$$

est minorée par $m = 2$

Réponse

On calcule $U_n - 2$ puis on étudie son signe :

$$U_n - 2 = 2 + \frac{1}{1+n} - 2$$

$$U_n - 2 = \frac{1}{1+n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1 + n > 0$$

$$\frac{1}{1+n} > 0$$

$$U_n - 2 > 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n > 2$$

<u>Conclusion :</u> La suite (U_n) est minorée par 2

- Chercher un encadrement de u_n en travaillant sur des inégalités.

Exemple :
Montrer que la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_n = 2 + \sin(n)$ est bornée.

Réponse : On part de l'encadrement de $\sin(n)$ puis on arrive à un encadrement de U_n.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 < \sin(n) < 1$$
$$2 - 1 < 2 + \sin(n) < 2 + 1$$
$$1 < 2 + \sin(n) < 3$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 < U_n < 3$$

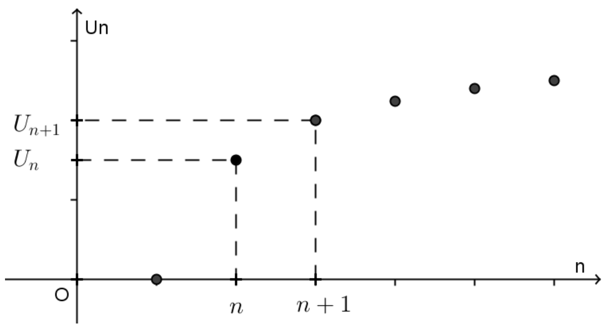
<u>Conclusion :</u>
La suite (U_n) est bornée par 1 et 3

- Etudier le sens de variation de la suite (u_n)
    - Si la suite (u_n) est croissante pour tout $n \geq 0$, alors la suite (u_n) est **minorée par son premier terme**.

Exemple :
Démontrer que la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = 3 - \frac{3}{n}$$

est minorée par 0



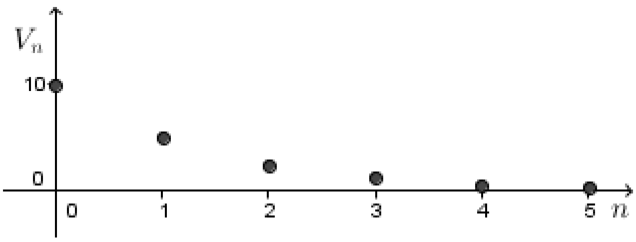
Réponse :
On montre d'abord que la suite est monotone croissante (voir la démonstration au paragraphe 4.5.1)
Le premier terme est $U_1 = 3 - \frac{3}{1}$
<u>Conclusion :</u> La suite (U_n) est minorée par $U_1 = 0$

- Si la suite (u_n) est décroissante pour $n \geq 0$, alors la suite (u_n) est **majorée par son premier terme**.

Exemple :
Démontrer que la suite (V_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$(V_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} V_0 = 10 \\ V_{n+1} = 0{,}5V_n \end{cases}$$

est minorée par 10



Réponse :
La suite est géométrique de premier terme strictement positif est de raison $q = 0{,}5$
$0 < q < 1$ donc la suite est monotone décroissante. Le premier terme est $V_0 = 10$.
<u>Conclusion :</u> La suite (V_n) est majorée par 10

- Utiliser un raisonnement par récurrence.

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$$

Démontrer que cette suite est majorée par 4

Réponse

Utilisons un raisonnement par récurrence pour établir la majoration de la suite (u_n)

Soit la proposition $P(n)$: $u_n \leq 4, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(1) **Initialisation** : Montrons que $P(n)$ est vraie pour $n = 0$.

On sait que $u_0 = 1$
Donc on a bien $u_0 \leq 4$
La proposition $P(n)$ est vraie pour $n = 0$.

(2) **Hérédité :** On suppose que la proposition $P(n)$ soit vraie pour un entier $k \geq 0$, c'est à dire qu'<u>on suppose </u>que $\boldsymbol{u_k} \leq 4$. Montrons qu'alors $P(n)$ est vraie pour l'entier $k + 1$, c'est à dire que $\boldsymbol{u_{k+1}} \leq 4$

- On cherche à écrire une inégalité concernant u_{k+1} en partant de l'hypothèse de récurrence : $u_k \leq 4$
  D'après la définition de la suite donnée dans l'énoncé, on a : $\boldsymbol{u_{k+1} = \frac{1}{4}u_k + 3}$

$$u_k \leq 4$$
$$\frac{1}{4}u_k \leq \frac{1}{4} \times 4$$
$$\frac{1}{4}u_k \leq 1$$
$$\frac{1}{4}u_k + 3 \leq 1 + 3$$
$$\boldsymbol{\frac{1}{4}u_k + 3} \leq 4$$
$$\boldsymbol{u_{k+1}} \leq 4$$

- On a obtenu la proposition écrite au rang $k + 1$

(3) **Conclusion :** la proposition $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 4$ est vraie. (u_n) est majorée par 4.

3 Limite d'une suite

3.1 Limite finie

Définition :

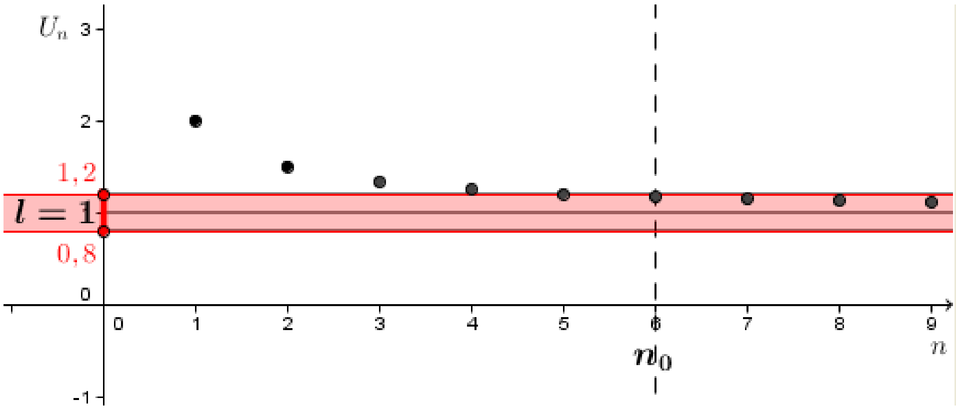
Soit l un réel. Dire qu'une suite (u_n) **a pour limite $\boldsymbol{l}$** signifie que tout intervalle ouvert contenant l <u>contient tous les termes de la suite</u> à partir d'un certain rang. On écrit alors :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = l$$

Exemple :

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $U_n = 1 + \frac{1}{n}$ a pour limite $l = 1$.

Cela signifie que tout intervalle (l'intervalle $]0{,}8\ ;\ 1{,}2[$ dans l'illustration ci-dessous) contient tous les termes de la suite ($U_6, U_7,\ U_8$ ...) à partir d'un certain rang n_0 ($n_0 = 6$ dans l'exemple ci-dessous).



n	U_n
1	2
2	1.5
3	1.33
4	1.25
5	1.2
6	1.17
7	1.14
8	1.13
9	1.11

3.2 Limite infinie

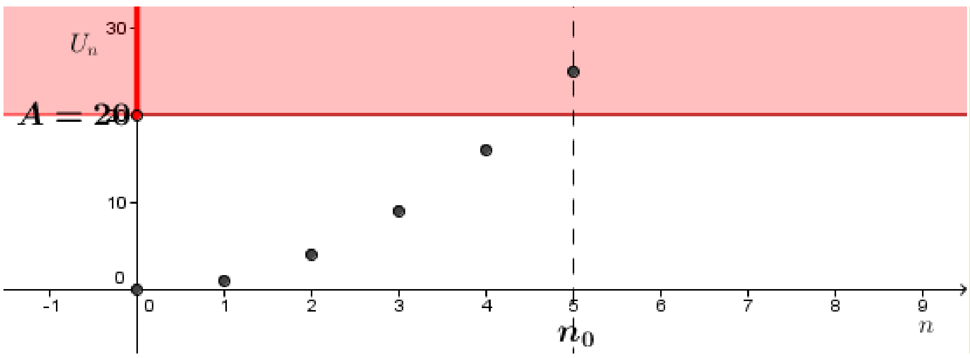
Définition 1 :

Dire qu'une suite (U_n) **a pour limite $+\infty$** signifie que tout intervalle $]A\,;+\infty\,[$, avec A réel , <u>contient tous les termes de la suite</u> à partir d'un certain rang.

Exemple :

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = n^2$ a pour limite $+\infty$.

Cela signifie que tout intervalle (l'intervalle $]20\ ;\ +\infty[$ dans l'illustration ci-dessous) contient tous les termes de la suite ($U_5, U_6,\ U_7$ ...) à partir d'un certain rang n_0 ($n_0 = 5$ dans l'exemple ci-dessous).



n	U_n
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49

Définition 2 :

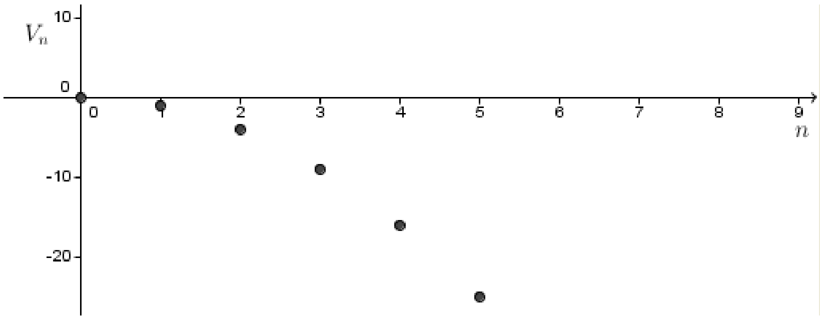
Dire qu'une suite (V_n) a pour limite $-\infty$ signifie que :

$$\lim_{n\to+\infty}(-V_n) = +\infty$$

Exemple :

La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $V_n = -n^2$ a pour limite $-\infty$.
En effet : $-V_n = n^2$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty}(-V_n) = +\infty$$

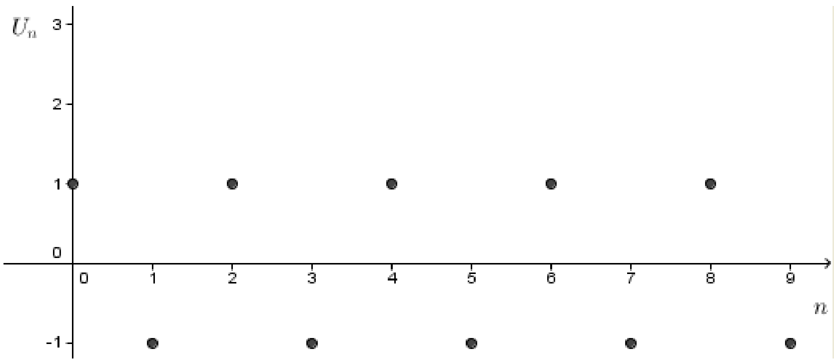


n	V_n
0	0
1	-1
2	-4
3	-9
4	-16
5	-25
6	-36
7	-49

<u>Pas de limite</u>

Exemple 1 :

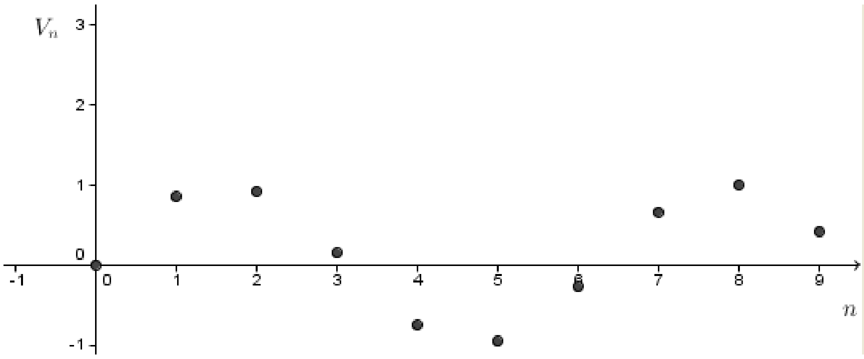
La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = (-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1. Elle n'a ni limite finie ni limite infinie.



n	U_n
0	1
1	-1
2	1
3	-1
4	1
5	-1
6	1
7	-1
8	1

Exemple 2 :

La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $V_n = \sin(n)$ prend alternativement des valeurs réelles entre -1 et 1. Elle n'a ni limite finie ni limite infinie.



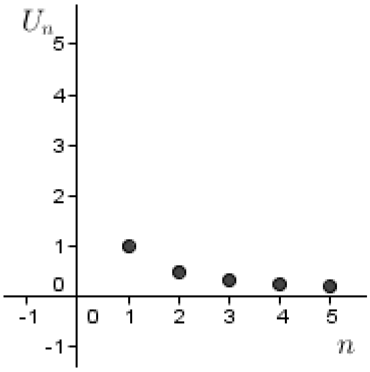
n	V_n
0	0
1	0.84
2	0.91
3	0.14
4	-0.76
5	-0.96
6	-0.28
7	0.66
8	0.99

Vocabulaire On dit que :

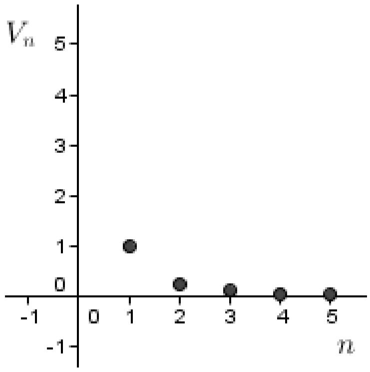
Une suite de limite finie l	converge vers l
Une suite de limite infinie	diverge
Une suite qui n'a pas de limite	diverge

Propriétés

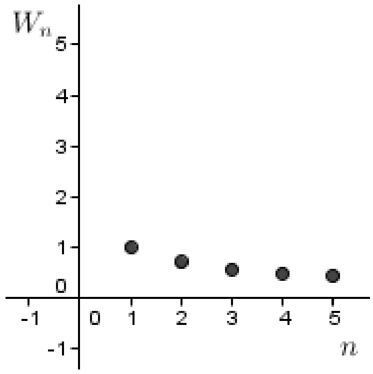
- Les suites de terme général $\frac{1}{n}$; $\frac{1}{n^2}$; $\frac{1}{\sqrt{n}}$ sont convergentes et leur limite est 0



$(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $U_n = \frac{1}{n}$

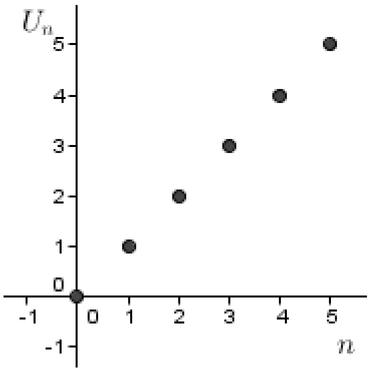


$(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $V_n = \frac{1}{n^2}$

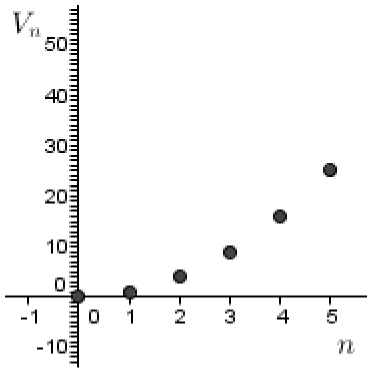


$(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $V_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

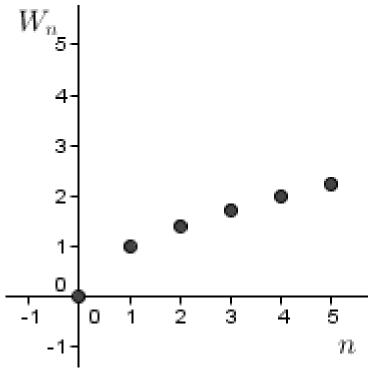
- Les suites de terme général n ; n^2 ; $\sqrt{n}$ sont divergentes et leur limite est $+\infty$



$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = n$

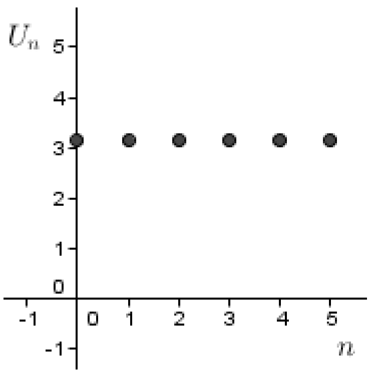


$(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $V_n = n^2$



$(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $W_n = \sqrt{n}$

- Les suites constantes convergent vers la valeur de la constante



$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = \pi$

- Si une suite converge alors sa limite l est **unique**.

- Détermination d'un seuil n_0 à l'aide d'un algorithme

Exemple :

Soit la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $U_n = 3n^2 + 2$

1. Montrer que cette suite est croissante
2. Montrer que cette suite a pour limite $+\infty$
3. Calculer et afficher le premier rang n_0 tel que $U_{n_0} \geq 20000$

Réponse

Puisque la suite est définie par une fonction de n, on peut étudier le sens de variation de la fonction.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2$

Cette fonction présente un extremum pour $x_S = -\frac{b}{2a}$

$$x_S = -\frac{0}{2 \times 3}$$

$$x_S = 0$$

$a = 3$ $a > 0$ donc l'extremum est un minimum.

Dans la fonction f est croissante sur $[0\,;\ +\infty[$.

Il en résulte que la suite (U_n) est monotone croissante.

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

Donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} 3n^2 = +\infty$

et donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} 3n^2 + 2 = +\infty$

Déclaration des variables

N est un entier

U est un réel

Début algorithme

N ← 0

U ← 2

Tant que U< 20000

| N ← N+1

| U ← 3N²+2

Fin Tant que

En Python :

```
def seuil():
    n=0
    u=2
    while u<20000:
        n=n+1
        u=3*(n**2)+2
    return n
```

3.3 Théorèmes généraux sur les limites de suites

3.3.1 Limite d'une somme de suites

Si $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	***FI*** [5]

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(n + \sqrt{n})$

Réponse : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}) = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n + \sqrt{n}) = +\infty$

3.3.2 Limite d'un produit de suites

Si $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) =$	l	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
et si $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n) =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n \times v_n)$	$l.l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***FI***

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n}$

Réponse : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}) = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\sqrt{n}) = +\infty$

3.3.3 Limite d'un quotient de suites

Si $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) =$	l	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
et si $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n) =$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
alors $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***FI***	***FI***

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n^2}$. *Réponse :* $\lim\limits_{n\to+\infty}(3) = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2) = +\infty$ donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n^2} = 0$

[5] Dans certains cas, ces théorèmes ne nous permettent pas de prévoir le résultat. Ces cas sont appelés *FORMES INDETERMINEES (FI).*

Cas d'indétermination

Il y a 4 cas d'indétermination $\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$

Dans ces cas, il faut modifier l'écriture de U_n pour permettre l'utilisation des théorèmes.

Exemple : Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt{n}\right)$. *Réponse :*

- On a $\lim_{n\to+\infty}(n) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}\right) = +\infty$ donc on est en présence de la forme indéterminée $\infty - \infty$
- On modifie l'écriture de $n-\sqrt{n}$, en cherchant par exemple à factoriser l'expression :

$$n-\sqrt{n} = n\times 1 - n\frac{\sqrt{n}}{n}$$

$$n-\sqrt{n} = n\times\left(1-\frac{\sqrt{n}}{n}\right)$$

$$n-\sqrt{n} = n\times\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- On étudie la limite de chaque facteur :

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$$

- Donc, par produit :

$$\lim_{n\to+\infty} n\times\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$$

<u>Conclusion</u> : $\lim_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt{n}\right) = +\infty$

Limite en l'infini d'une suite définie par une fonction polynôme

La limite **en l'infini** d'une fonction polynôme[6] est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré. Il en est donc de même pour une suite définie par une fonction polynôme.

Exemple :

$\lim_{n\to+\infty}(-3n^2+4n+2) = \lim_{n\to+\infty} -3n^2$ Donc $\lim_{n\to+\infty}(-3n^2+4n+2) = -\infty$

Limite en l'infini d'une suite définie par une fonction rationnelle

La limite **en l'infini** d'une fonction rationnelle[7] est égale à la limite du quotient de ses monômes de plus haut degré. Il en est donc de même pour une suite définie par une fonction rationnelle.

---

[6] **Polynôme** Un polynôme est une somme de monômes.
Une fonction polynôme est une fonction de la forme $x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, où $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ sont des réels donnés et n un entier naturel appelé le degré du polynôme lorsque $a_n \neq 0$.

[7] **Rationnelle** : Quotient de deux polynômes.
Une fonction rationnelle est une fonction de la forme $x \longmapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$, où $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0, b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0$ sont des réels et n et m des entiers naturels tels que $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$.

Exemple :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-3n^2+4n+2}{3n^3+4n^2-2n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-3n^2}{3n^3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-3n^2+4n+2}{3n^3+4n^2-2n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-3n^2+4n+2}{3n^3+4n^2-2n-1} = 0$$

3.4 Théorème de comparaison

3.4.1 Pour prouver qu'une suite a comme limite $+\infty$

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang , $u_n \leq v_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Exemple :
Etudier la convergence de la suite (V_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $V_n = n^2 + (-1)^n$
Réponse :
Les théorèmes sur les opérations sur les limites ne permettent pas de répondre puisque la suite définie par $(-1)^n$ n'a pas de limite.
Mais on peut utiliser la comparaison de la suite (V_n) avec une suite (U_n) qu'on définit pour tout entier naturel n par $U_n = n^2 - 1$
En effet, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$-1 \leq (-1)^n$$
$$n^2 - 1 \leq n^2 + (-1)^n$$
$$n^2 - 1 \leq V_n$$
$$U_n \leq V_n$$

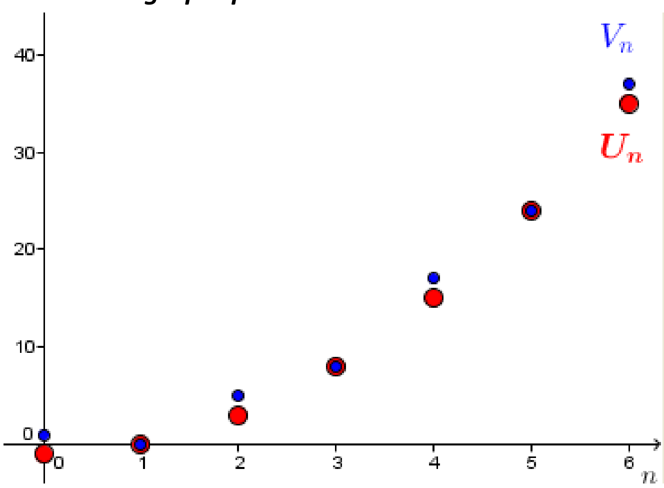
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, et par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2-1) = +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$$

Donc, d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$$

Illustration graphique :



n	U_n	V_n
0	-1	1
1	0	0
2	3	5
3	8	8
4	15	17
5	24	24
6	35	37
7	48	48
8	63	65
9	80	80
10	99	101

Démonstration : Divergence vers $+\infty$ d'une suite (v_n) minorée par une suite (u_n) de limite $+\infty$

- Par définition, si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$, alors il existe un entier naturel n_1 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_1$, $u_n \in]A\,;\ +\infty[$.
- De plus, par hypothèse il existe un entier naturel n_2 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_2$, $u_n \leq v_n$.
- Soit N un entier naturel supérieur ou égal à n_1 et n_2. Donc pour tout $n \geq N : v_n \geq A$, ainsi par définition de la limite $+\infty$ on déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

3.4.2 Pour prouver qu'une suite a comme limite -∞

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang , $u_n \leq v_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exemple :

Etudier la convergence de la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = -n^2 + \sin(n)$

Réponse :

On définit la suite (V_n) pour tout entier naturel n par $V_n = -n^2 + 1$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\sin(n) \leq 1$$
$$-n^2 + \sin(n) \leq -n^2 + 1$$
$$U_n \leq V_n$$

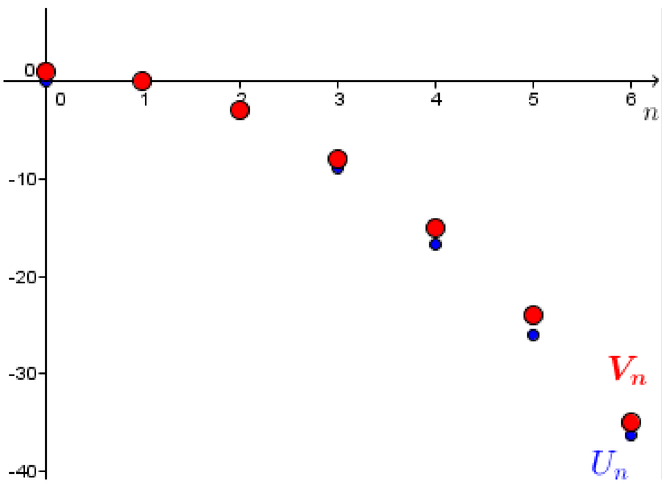
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$, et par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n^2 + 1) = -\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty$$

Donc, d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$$

Illustration graphique :



n	U_n	V_n
0	0	1
1	-0.16	0
2	-3.09	-3
3	-8.86	-8
4	-16.76	-15
5	-25.96	-24
6	-36.28	-35
7	-48.34	-48
8	-63.01	-63
9	-80.59	-80
10	-100.54	-99

3.5 Théorème des gendarmes pour prouver qu'une suite a pour limite *l*

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang , $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$

Exemple :

Etudier la convergence de la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$V_n = \frac{5}{n}\sin(n) + 2$$

Réponse :

On définit la suite (U_n) pour tout entier naturel n non nul par :

$$U_n = -\frac{5}{n} + 2$$

et la suite (W_n) pour tout entier naturel n non nul par :

$$W_n = \frac{5}{n} + 2$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$
$$-5 \leq 5\sin(n) \leq 5$$
$$\frac{-5}{n} \leq \frac{5\sin(n)}{n} \leq \frac{5}{n}$$
$$\frac{-5}{n} + 2 \leq \frac{5\sin(n)}{n} + 2 \leq \frac{5}{n} + 2$$
$$U_n \leq V_n \leq W_n$$

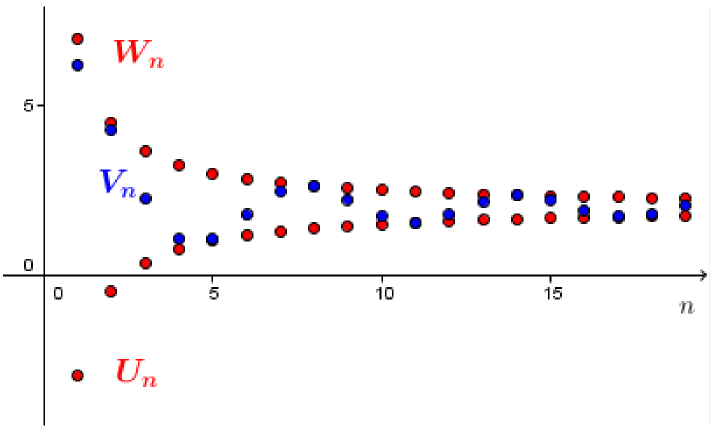
Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{n} = 0$, et par produit et par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{-5}{n} + 2\right) = 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{n} + 2\right) = 2$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} W_n = 2$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = 2$$

Illustration graphique :

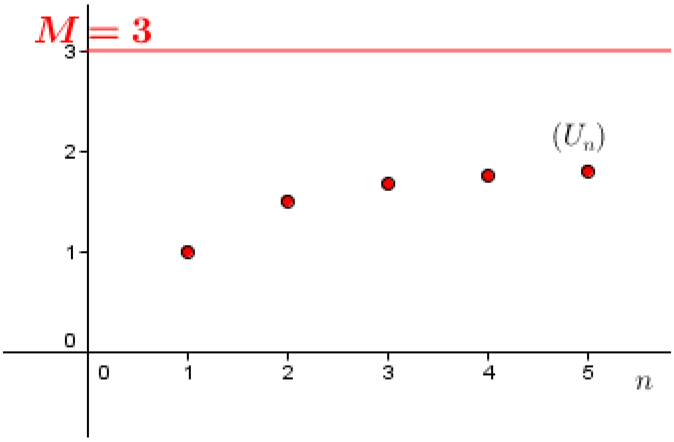


n	U_n	V_n	W_n
1	-3	6.21	7
2	-0.5	4.27	4.5
3	0.33	2.24	3.67
4	0.75	1.05	3.25
5	1	1.04	3
6	1.17	1.77	2.83
7	1.29	2.47	2.71
8	1.38	2.62	2.63
9	1.44	2.23	2.56
10	1.5	1.73	2.5

3.6 Théorème de la convergence d'une suite monotone (admis)

- 1er cas : Soit une suite croissante. Si cette suite est majorée alors elle converge.

Exemple :



La suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = 2 - \frac{1}{n}$

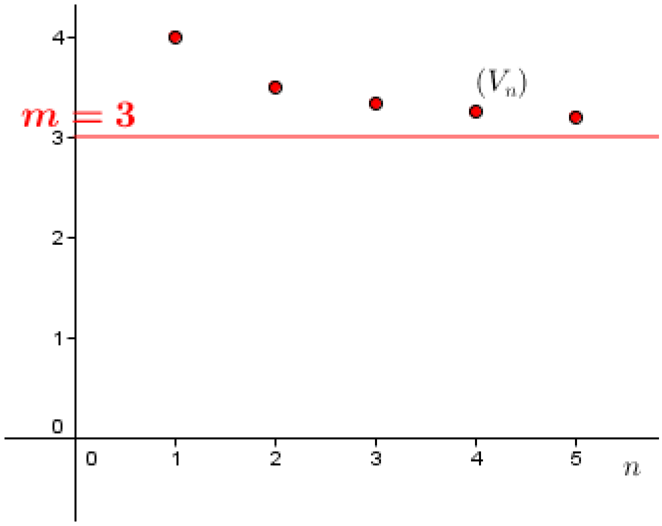
On montre que :

- (U_n) est croissante
- (U_n) est majorée par 3 (par exemple)

On conclut que *d'après le théorème de la convergence d'une suite monotone*, la suite (U_n) a une limite finie.

- 2ème cas : Soit une suite décroissante. Si cette suite est minorée alors elle converge.

Exemple :



La suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n = 3 + \frac{1}{n}$

On montre que :

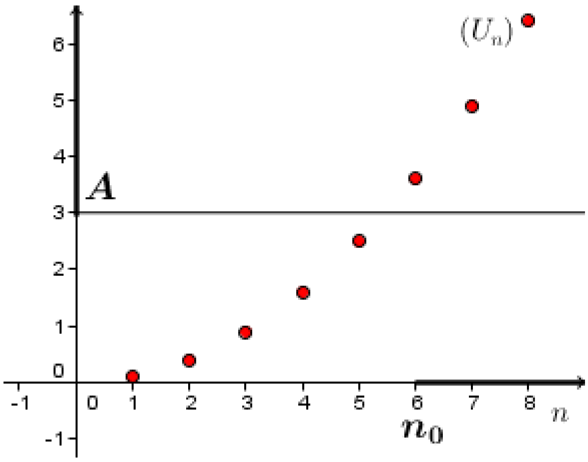
- (V_n) est décroissante
- (V_n) est minorée par 3 (par exemple)

On conclut que *d'après le théorème de la convergence monotone*, la suite (V_n) a une limite finie.

⚠ Le théorème de la convergence monotone permet d'assurer qu'une suite converge. Mais il ne donne pas la valeur de la limite.

3.7 Théorème : suite croissante non majorée

Soit une suite croissante. Si cette suite n'est pas **majorée**, alors elle diverge vers $+\infty$.



Démonstration : Soit A un réel.

- La suite (u_n)n'est pas majorée donc il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A$.
- De plus , la suite (u_n) est croissante , donc tous ses termes , à partir du rang n_0 sont supérieurs à A et sont donc dans l'intervalle $]A\,;\,+\infty[$.

Donc tout intervalle du type $]A\,;\,+\infty[$.contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (qui est n_0). Donc, par définition de la limite +∞, la suite (u_n) tend vers +∞.

De même, on démontre que :

Soit une suite décroissante. Si cette suite n'est pas **minorée**, alors elle diverge vers $-\infty$.

3.8 Limite d'une suite de terme général q^n

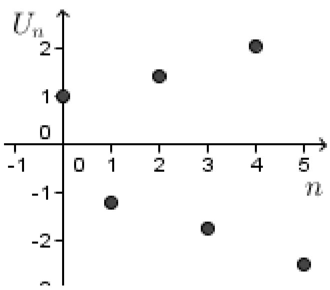
Propriété :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = q^n$ avec $q \in \mathbb{R}$.

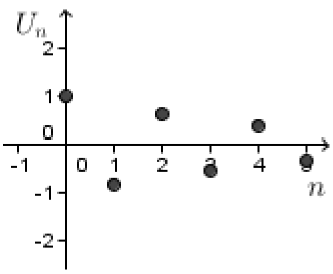
Si la valeur du réel q est telle que …	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = \cdots$	n'existe pas	0	1	$+\infty$

Illustration :

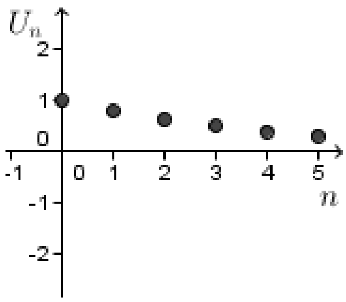
$n \longmapsto (-1{,}2)^n$



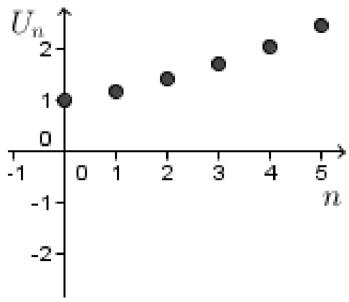
$n \longmapsto (-0{,}8)^n$



$n \longmapsto 0{,}8^n$



$n \longmapsto 1{,}2^n$



<u>Démonstration : dans le cas où q >1.</u>

✶ Démontrons d'abord, par récurrence, le résultat préliminaire suivant :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \boldsymbol{(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha}$$

On appelle P_n la propriété à démontrer.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$.
D'une part, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $(1+\alpha)^0 = 1$
D'autre part, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $1 + 0\alpha = 1$
Donc on a $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $(1+\alpha)^0 \geq 1 + 0\alpha$
La proposition P_0 est vraie.
<u>Hérédité</u> : On admet que pour l'entier naturel k, la proposition P_k est vraie soit :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad (1+\alpha)^k \geq 1 + k\alpha$$

Démontrons qu'alors la proposition P_{k+1} l'est aussi :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad (1+\alpha)^{k+1} \geq 1 + (k+1)\alpha$$

Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad (1+\alpha)^k \geq 1 + k\alpha$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad (1+\alpha)^{k+1} \geq (1 + k\alpha)(1+\alpha)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad (1+\alpha)^{k+1} \geq 1 + \alpha + k\alpha + k\alpha^2$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad (1+\alpha)^{k+1} \geq 1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2$$

Or, $1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2 \geq 1 + (k+1)\alpha$

Donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $(1+\alpha)^{k+1} \geq 1 + (k+1)\alpha$

Ainsi la proposition P_n est héréditaire.

<u>Conclusion</u> : P_n est vraie tout entier naturel n

<u>Conséquence :</u>

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

pour tout réel $\alpha > 0$ et pour tout entier naturel n est **l'inégalité de Bernoulli** (nommée ainsi en référence à Jacques Bernoulli, mathématicien suisse 1654 – 1705).

Ainsi, par exemple, $1{,}004^4 \geq 1 + 4 \times 0{,}007$

$$1{,}004^4 \geq 1{,}028$$

Application : Etude de la limite de q^n lorsque $q > 1$:

✶Comme $q > 1$ alors on peut poser $q = 1 + \alpha$ avec α >0.
Ainsi, la propriété P_n démontrée s'écrit : $\boldsymbol{q^n \geq 1 + n\alpha}$
On calcule les limites :

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + n\alpha) = +\infty$$

D'où, en utilisant le théorème de comparaison : $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$