CHAPITRE 3 : Fonctions : limites, dérivation, continuité, convexité

[1 Limite d’une fonction 3](#_Toc56456506)

[1.1 Limite finie en +∞ ou -∞ 3](#_Toc56456507)

[1.2 Limite infinie en +∞ ou -∞ 3](#_Toc56456508)

[1.3 Limite de référence 5](#_Toc56456509)

[1.4 Théorèmes généraux 5](#_Toc56456510)

[1.4.1 Limite d’une somme 5](#_Toc56456511)

[1.4.2 Limite d’un produit 5](#_Toc56456512)

[1.4.3 Limite d’un quotient 6](#_Toc56456513)

[1.5 Théorème de comparaison 6](#_Toc56456514)

[1.6 Théorème des gendarmes 6](#_Toc56456515)

[1.7 Limites et composées 6](#_Toc56456516)

[1.7.1 Limite d’une fonction suivie d’une fonction 6](#_Toc56456517)

[1.7.2 Limite d’une suite suivie d’une fonction 7](#_Toc56456518)

[1.8 Croissances comparées de la fonction exponentielle et d’une fonction puissance en +∞ et en -∞ 7](#_Toc56456519)

[1.9 Interprétation graphique d’une limite 11](#_Toc56456520)

[1.9.1 Asymptote parallèle à l’axe des ordonnées (asymptote verticale) 11](#_Toc56456521)

[1.9.2 Asymptote parallèle à l’axe des abscisses (asymptote horizontale) 11](#_Toc56456522)

[2 Dérivation 12](#_Toc56456523)

[2.1 Rappels des formules de dérivation (programme de première) 12](#_Toc56456524)

[2.1.1 Fonctions usuelles 12](#_Toc56456525)

[2.1.2 Formules d’opérations sur les fonctions dérivées 12](#_Toc56456526)

[2.2 Dérivée de la composée de deux fonctions 12](#_Toc56456527)

[2.2.1 Définition 12](#_Toc56456528)

[2.2.2 Formule de dérivation d’une fonction composée 13](#_Toc56456529)

[3 Convexité 14](#_Toc56456530)

[3.1 Dérivée seconde 14](#_Toc56456531)

[3.2 Fonction convexe et fonction concave 14](#_Toc56456532)

[3.3 Point d’inflexion 16](#_Toc56456533)

[3.4 Convexité et tangentes 17](#_Toc56456534)

[4 Continuité 18](#_Toc56456535)

[4.1 Définition 18](#_Toc56456536)

[4.2 Illustration graphique 19](#_Toc56456537)

[4.3 Fonctions usuelles 19](#_Toc56456538)

[4.4 Théorème des valeurs intermédiaires 19](#_Toc56456539)

[4.5 Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires 20](#_Toc56456540)

CHAPITRE 3 : Fonctions : limites, dérivation, continuité, convexité

# Limite d’une fonction

## Limite finie en +∞ ou -∞

Soit *l*  un réel.

Dire qu’une fonction a pour **limite  *l*** en signifie que **tout intervalle ouvert contenant *l*** contient toutes les valeurs de dès que assez grand. (Enoncé analogue en ).

***Remarque :***

* est la lettre grecque epsilon. Elle représente un réel strictement positif, aussi petit que l’on veut. Par exemple .

***Illustration :***

## Limite infinie en +∞ ou -∞

* Limite quand tend vers

Dire qu’une fonction *f* a pour **limite**  en signifie que **tout intervalle**  , avec *A* réel, contient toutes les valeurs de pour *x* assez grand.

***Illustration :***



***Exemple :*** peut dépasser par exemple . En effet pour plus grand que . Comme on peut faire ce raisonnement pour tout réel , on dit que la limite de quand tend vers est égale à .

* Limite quand tend vers

Dire qu’une fonction *f* a pour **limite** en signifie que **tout intervalle**  , avec *B* réel, contient toutes les valeurs de pour *x* assez grand.



* Limite quand tend vers

Dire qu’une fonction *f* a pour **limite** en signifie que **tout intervalle**  , avec *A* réel, contient toutes les valeurs de pour tout *x* inférieur à une certaine valeur ..

***Illustration :***



* Limite quand tend vers

Dire qu’une fonction *f* a pour **limite** en signifie que **tout intervalle**  , avec *B* réel, contient toutes les valeurs de pour tout *x* inférieur à une certaine valeur ..

***Illustration :***



## Limite de référence

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  si pair |  si impair |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

## Théorèmes généraux

* Les théorèmes utilisés pour les calculs des limites de suites sont réutilisés et étendus aux limites de fonctions quand tend vers ou quand tend vers un réel .
* Dans ce qui suit, et ’ sont deux réels, et sont deux fonctions définies sur un intervalle ou une réunion d’intervalles de
* Le réel peut être remplacé par + ou –.

### Limite d’une somme

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | ***FI*** |

### Limite d’un produit

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  ou  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | ***FI*** |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  ou  |
|  |  |  si  si  |  si  si  |  |

### Limite d’un quotient

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  | 0 |  ou  |
|  |  |  ou  |  |  |  |  |  | 0 | ou  |
|  |  | 0 |  ou  |  |  |  |  | ***FI*** | ***FI*** |

## Théorème de comparaison

Soient et deux fonctions.

* Si pour assez grand, et si alors
* Si pour assez grand, et si alors

## Théorème des gendarmes

Soient , et des fonctions et un réel.

Si pour assez grand, ,

Si et si

alors :

Ce théorème s’étend aux cas de limites en et en un réel.

## Limites et composées

### Limite d’une fonction suivie d’une fonction

 , et désignent des réels ou ou .

 et sont des fonctions.

Si alors

***Exemple*** : Soit la fonction définie sur par . Calculer

*Réponse :*

On a donc **par composition**,

### Limite d’une suite suivie d’une fonction

 et *b* désignent deux réels ou ou.

 est une suite, est une fonction.

Si alors

***Exemple :*** Soit la suite de terme général . Calculer

*Réponse :* Posons avec :

 la suite définie sur par et la fonction définie sur par .

 donc **par composition**,

## Croissances comparées de la fonction exponentielle et d’une fonction puissance en +∞ et en -∞

***Exemple quand tend vers  :***

Fonction exponentielle contre fonction

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Fonction exponentielle  |  |  | Fonction puissance  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |
| La fonction exponentielle croit en bien plus vite que la fonction . Le rapport |  | tend vers . |

***Exemple quand tend vers  :***

Fonction exponentielle contre fonction

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Fonction exponentielle  |  |  | Fonction puissance  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |
| La fonction exponentielle s’approche de en bien plus vite que la fonction . Le produit |  | tend vers  |

Ces comportements sont les mêmes quelle que soit la puissance.

***Théorèmes des croissances comparées***

Pour tout entier naturel ,

***Remarque :***

On dit que la fonction exponentielle « l’emporte » sur la fonction puissance.

***Démonstration du théorème des croissances comparées en +∞ de et***

* Résultat préalable : montrons que,

Cela revient à montrer que

On pose .

Etudions le signe sur de

Comme on ne peut l’avoir directement alors on étudie le sens de variation de :

Etudions le signe sur de

Comme on ne peut l’avoir directement alors on étudie le sens de variation de :

On sait que, , c’est-à-dire

alors : est croissante sur cet intervalle.

Donc admet un minimum en 0 , il vaut = 1.

Donc

Donc la fonction *f* est croissante sur  .

De plus, = 1 donc soit

* Utilisation du théorème de comparaison pour avoir

d’après le résultat préalable, pour tout *x* :

Donc, d’après le théorème de comparaison :

***Démonstration du théorème des croissances comparées en +∞ de et***

On part du résultat précédent :

Donc, pour tout , on multiplie par  :

Donc, pour tout , on met à la puissance  :

On fait un changement de variable en posant :

Donc :

## Interprétation graphique d’une limite

### Asymptote parallèle à l’axe des ordonnées (asymptote verticale)

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle ou ( réels)

Si ou , alors la droite d'équation est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de *f*.

***Exemple***



donc la courbe a pour asymptote verticale la droite d’équation

### Asymptote parallèle à l’axe des abscisses (asymptote horizontale)

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle ] (respectivement ). ( réel)

Si (respectivement ),

alors la droite d’équation est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de *f* en (respectivement).

***Exemple***



donc la courbe a pour asymptote horizontale la droite d’équation

# Dérivation

## Rappels des formules de dérivation (programme de première)

### Fonctions usuelles

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Fonction *f*** | **Ensemble de définition de *f*** | **Dérivée *f* '** | **Ensemble de définition de *f '*** |
| ,  |  |  |  |
| ,  |  |  |  |
|   |  |  |  |
|  entier |  |  |  |
|  | \{0} |  | \{0} |
|  entier | \{0} |  | \{0} |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

### Formules d’opérations sur les fonctions dérivées

|  |  |
| --- | --- |
|  est dérivable sur  |  |
|  est dérivable sur , où est une constante |  |
|  est dérivable sur  |  |
|  est dérivable sur, où ne s'annule pas sur |  |
|  est dérivable sur , où ne s'annule pas sur  |  |

## Dérivée de la composée de deux fonctions

### Définition

On considère la fonction *f* définie par .

La fonction *f* est la composée de deux fonctions et telles que :

Les fonctions et sont définies par : et

On dit que la fonction *f* est la composée de par et on note :

### Formule de dérivation d’une fonction composée

* Soit une fonction définie et dérivable sur un intervalle et ayant ses valeurs dans un intervalle
* Soit une fonction définie et dérivable sur un intervalle .
* La fonction est dérivable sur l'intervalle et on a :

 ou encore

On note :

***Exemples :***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Fonction** | **Ensemble de définition** | **Dérivée** |
|  | Condition : il faut que |  |
|  avec  | Dans le cas où , il faut que  |  |
|  |   |  |

# Convexité

## Dérivée seconde

Soit une fonction dérivable sur un intervalle dont la dérivée est dérivable sur .

On appelle **fonction dérivée seconde** de sur la dérivée de et on note :

***Exemple***

## Fonction convexe et fonction concave

Soit une fonction *f* définie sur un intervalle et sa courbe représentative dans un repère.



* La fonction *f* est **convexe sur**  si, pour tous réels et de , la **portion de courbe**  située entre les points et est **en-dessous de la sécante .**

Portion de courbe



Portion de courbe

* La fonction *f* est **concave sur**  si, pour tous réels et de , la **portion de courbe**  située entre les points et **est** **au-dessus de la sécante .**

**Propriété :** Soit une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

* Si pour tout de on a alors la fonction est **convexe sur**
* Si pour tout de on a alors la fonction est **concave sur .**

***Exemple :***

Soit la fonction définie sur par .

Étudier la convexité de la fonction .

*Réponse :*

Pour tout de, on a : .

Pour tout de , on a : qui s’annule pour .

Pour tout , .

Pour tout , .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| Signe de  |  |  |  |  |  |

*D*onc est concave sur et est convexe sur .

|  |
| --- |
| Partie concave |

***Remarques :***

* Si pour tout de on a alors la **dérivée est** **croissante sur .**
* Si pour tout de on a alors la **dérivée**  est **décroissante sur** .

## Point d’inflexion

Soit une fonction dérivable sur un intervalle I.

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.

Point d’inflexion

***Remarque :***

* Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

***Propriétés (admises)***

Soit une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle , sa courbe représentative et un réel appartenant à .

* Si change de sens de variation en , alors admet un point d’inflexion en .
* Si s’annule **et change de signe** en , alors admet un point d’inflexion en .

***Exemple :***

Reprenons l’exemple précédent.

Soit la fonction définie sur par .

Pour tout de, on a : .

Pour tout de , on a :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| Signe de  |  |  |  |  |  |



La courbe a un **point d’inflexion** pour .

## Convexité et tangentes

***Propriétés***

Soient une fonction et sa courbe représentative dans un repère. Soit un intervalle sur lequel est dérivable.

* Sur l’intervalle , est **convexe** si et seulement si  **est au-dessus de toutes ses tangentes** .
* Sur l’intervalle , est **concave** si et seulement si  **est en-dessous de toutes ses tangentes.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Capture d’écran 2012-05-16 à 15 |  | Capture d’écran 2012-05-16 à 16 |
| Fonction convexe |  | Fonction concave |

***Remarque***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Convexe | Concave |
| Croissante |  |  |
|  | Une fonction **croissante et convexe** sur un intervalle est une fonction qui **croit « de plus en plus vite »** sur . Si elle est dérivable sur , alors les pentes des tangentes à sa courbe représentative augmentent quand les abscisses augmentent. | Pour une fonction **croissante et concave**, c’est le contraire : elle **croit « de moins en moins vite »**. |

# Continuité

## Définition

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle et *a* un réel de .

⮚ Dire que *f* est continue en signifie que

⮚ Dire que *f* est continue sur signifie que *f* est continue en tout réel de .

***Exemple***

On considère la fonction *f* définie sur par

La fonction *f* est-elle continue sur ?

*Réponse : Sur la TI83, dans f(x), choisissez Y1=. Appuyez sur* **math** *B :parmorceaux( . Saisissez* **3** *morceaux et* **OK***. Sur chaque ligne saisissez l’expression de la fonction et la condition sur X.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

* D’après la représentation graphique, on peut conjecturer que la fonction n’est pas continue en . Montrons-le en calculant puis .

Pour calculer il faut utiliser l’expression . On a .

Pour calculer , il faut calculer la limite à gauche de et la limite à droite de .

 donc la fonction n’a pas de limite en . Donc **on n’a pas** **.**

Conclusion : La fonction **n’est pas continue en** .

## Illustration graphique

La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

***Exemples et contre-exemples :***

|  |  |
| --- | --- |
| Fonctions continues en a | Fonctions non continues en a |
| Capture d’écran 2012-05-12 à 19 | Capture d’écran 2012-05-12 à 19 | Capture d’écran 2012-05-12 à 19 | *Capture d’écran 2012-05-12 à 19* |

## Fonctions usuelles

* Les fonctions polynômes, valeur absolue, sinus et cosinus sont continues sur .
* La fonction racine carrée est continue sur .
* La fonction exponentielle est continue sur .
* Les fonctions construites par opération ou par composition à partir des précédentes sont continues sur leur ensemble de définition. Exemple : les fonctions rationnelles

***Remarque :*** Les flèches obliques d’un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l’intervalle considéré.

## Théorème des valeurs intermédiaires

On considère la fonction *f* définie et continue sur un intervalle [*a* ; *b*].

Pour tout réel compris entre et , il existe au moins un réel compris entre et tel que .



## Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Si sur un intervalle on a les trois hypothèses :

* est continue
* est *strictement* monotone
* (ou bien si la fonction est décroissante)

alors l’équation a *une unique solution* dans l'intervalle



***Exemple***

On considère la fonction *f* définie sur par .

1) Démontrer que l’équation admet exactement une solution sur

2) À l’aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution .

*Réponse :*

1. On représente la courbe d’équation et la droite d’équation sur la calculatrice pour voir comment se présente la fonction.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Sur l’intervalle on donne les trois hypothèses nécessaires au corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

* est continue.
* est strictement monotone. Justification :

 est dérivable sur comme somme de fonctions dérivables et

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| Signe de  |  |  |  |  |  |  |  |
| Signe de  |  |  |  |  |  |  |  |
| Signe de  |  |  |  |  |  |  |  |
| Variations de  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

D’après le tableau de variations, est strictement croissante sur

* et

donc

On conclut :

D’après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l’équation a *une unique solution* dans l'intervalle

1. À l’aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution .

On affiche le graphique

On utilise 2nd calculs

On choisit 5 : intersection

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| On place le curseur à l’aide des flèches de direction à proximité du point d’intersection d’abscisse  |  |  |
|  |  |  |
| On appuie trois fois sur **entrer**  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| La valeur approchée de apparait lorsqu’on voit « Intersection ».Donc la réponse est : |  |  |