CHAPITRE 3 : Fonctions : limites, dérivation, continuité, convexité

CHAPITRE 3 : Fonctions : limites, dérivation, continuité, convexité

1 Limite d'une fonction

1.1 Limite finie en +∞ ou -∞

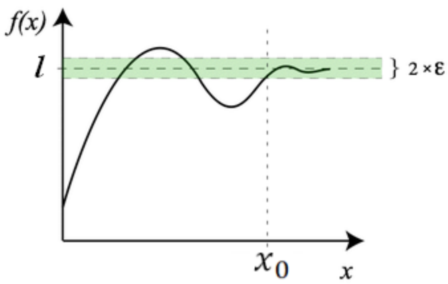
Soit l un réel.

> Dire qu'une fonction a pour **limite** $\boldsymbol{l}$ en $+\infty$ signifie que **tout intervalle ouvert** $]\boldsymbol{l}-\boldsymbol{\varepsilon}\ ;\ \boldsymbol{l}+\boldsymbol{\varepsilon}[$ **contenant** $\boldsymbol{l}$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x assez grand. (Enonce analogue en $-\infty$).

Remarque :

- $\boldsymbol{\varepsilon}$ est la lettre grecque epsilon. Elle représente un réel strictement positif, aussi petit que l'on veut. Par exemple $\varepsilon = 10^{-18}$.

Illustration :

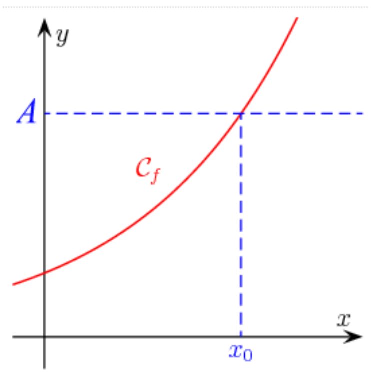


1.2 Limite infinie en +∞ ou -∞

- Limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

> Dire qu'une fonction f a pour **limite** $+\infty$ en $+\infty$ signifie que **tout intervalle** $]\boldsymbol{A}\ ;\ +\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

Illustration :

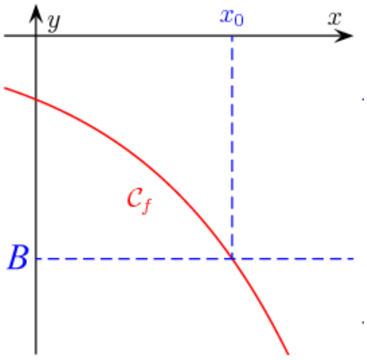


$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

<u>Exemple :</u> $f(x) = \sqrt{x}$ peut dépasser par exemple $A = 10^{20}$. En effet $]\mathbf{10^{20}}\ ;\ +\infty[$ pour x plus grand que $x_0 = 10^{10}$. Comme on peut faire ce raisonnement pour tout réel A, on dit que la limite de $\sqrt{x}$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$.

- Limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$

Dire qu'une fonction f a pour **limite** $-\infty$ en $+\infty$ signifie que **tout intervalle** $]-\infty\,;\, \boldsymbol{B}[$, avec B réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

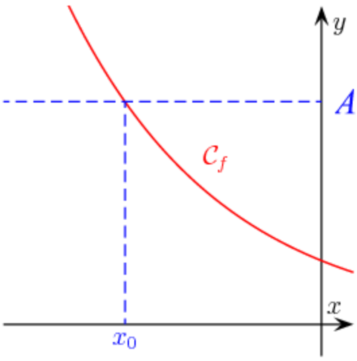


$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

- Limite $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$

Dire qu'une fonction f a pour **limite**$+\infty$ en $-\infty$ signifie que **tout intervalle** $]\boldsymbol{A}\,;\, +\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout x inférieur à une certaine valeur x_0..

Illustration :

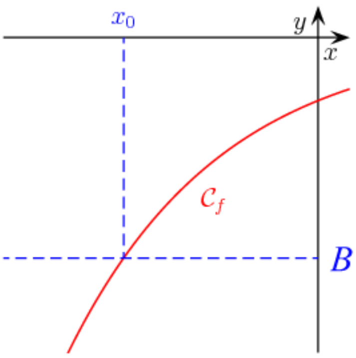


$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

- Limite $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$

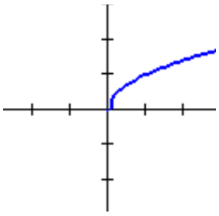
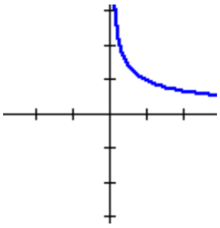
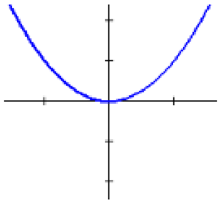
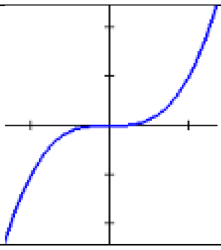
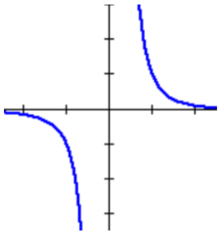
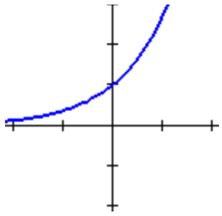
Dire qu'une fonction f a pour **limite**$-\infty$ en $-\infty$ signifie que **tout intervalle** $]-\infty\,;\, \boldsymbol{B}[$, avec B réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout x inférieur à une certaine valeur x_0..

Illustration :



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

1.3 Limite de référence

$\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	x^n si n pair	x^n si n impair	$\frac{1}{x^n}$	e^x
					
$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

1.4 Théorèmes généraux

- Les théorèmes utilisés pour les calculs des limites de suites sont réutilisés et étendus aux limites de fonctions quand x tend vers $-\infty$ ou quand x tend vers un réel a.
- Dans ce qui suit, l et l' sont deux réels, f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$
- Le réel a peut être remplacé par $+\infty$ ou $-\infty$.

1.4.1 Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	***FI***

1.4.2 Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$	$l.l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***FI***

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} kf(x), k\in\mathbb{R}$	kl	$+\infty$ si $k>0$ $-\infty$ si $k<0$	$-\infty$ si $k>0$ $+\infty$ si $k<0$	0 si $k=0$

1.4.3 Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	$l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $+\infty$	0	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$+\infty$ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***FI***	***FI***

1.5 Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions.

- Si pour x assez grand, $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- Si pour x assez grand, $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

1.6 Théorème des gendarmes

Soient f, g et h des fonctions et l un réel.

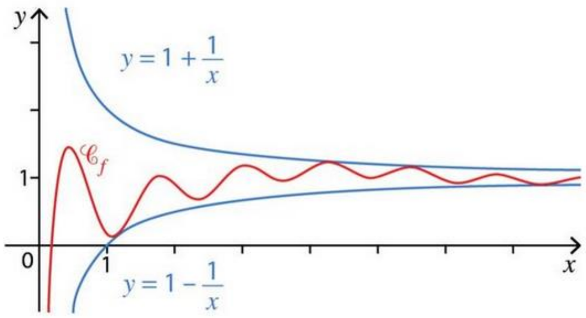
Si pour x assez grand, $g(x) < f(x) < h(x)$,

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$

alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

Ce théorème s'étend aux cas de limites en $-\infty$ et en un réel.



1.7 Limites et composées

1.7.1 Limite d'une fonction suivie d'une fonction

a , b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

f et g sont des fonctions.

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{X\to b} g(X) = c \end{cases} \text{ alors } \lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = c$$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$par $f(x) = cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Réponse :

$$\text{On a } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} cos(X) = 1 \end{cases} \text{ donc } \textbf{par composition}, \lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

1.7.2 Limite d'une suite suivie d'une fonction

a et b désignent deux réels ou $+\infty$ ou$-\infty$.

(u_n) est une suite, f est une fonction.

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \end{cases} \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$$

Exemple : Soit $(v_n)_{n\geq1}$ la suite de terme général $v_n = sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Réponse : Posons $v_n = f(u_n)$ avec :

(u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = sin(x)$.

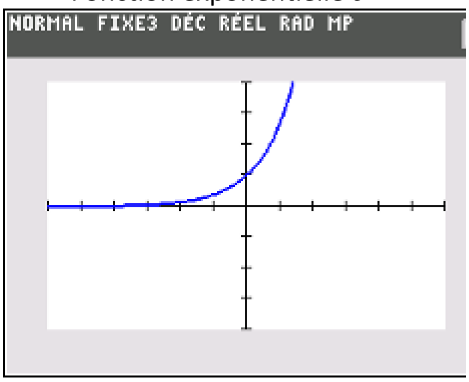
$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{4} \\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ donc } \textbf{par composition, } \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

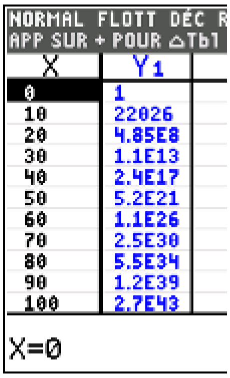
1.8 Croissances comparées de la fonction exponentielle et d'une fonction puissance en +∞ et en -∞

Exemple quand x tend vers $+\infty$ ***:***

Fonction exponentielle contre fonction x^3

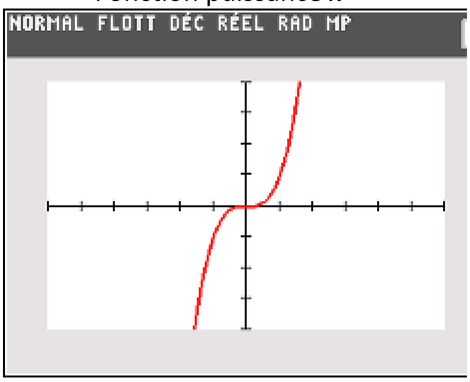
Fonction exponentielle e^x

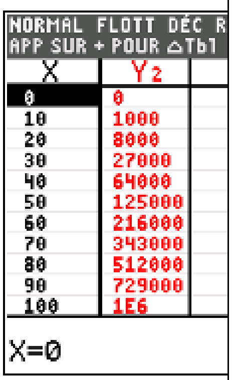




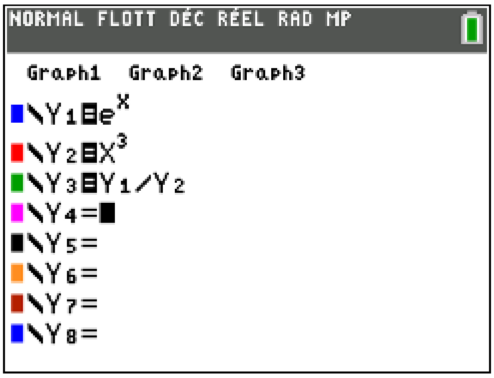
X	Y_1
0	1
10	22026
20	4.85E8
30	1.1E13
40	2.4E17
50	5.2E21
60	1.1E26
70	2.5E30
80	5.5E34
90	1.2E39
100	2.7E43

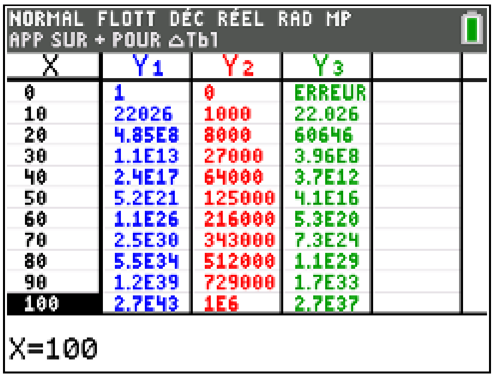
Fonction puissance x^3





X	Y_2
0	0
10	1000
20	8000
30	27000
40	64000
50	125000
60	216000
70	343000
80	512000
90	729000
100	1E6





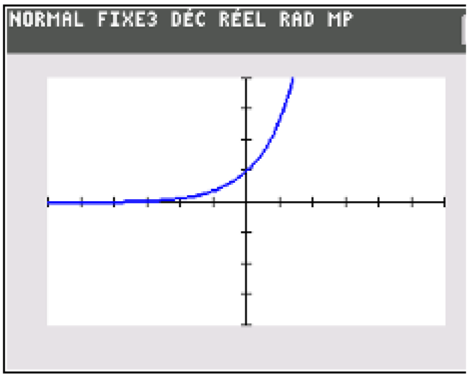
X	Y_1	Y_2	Y_3
0	1	0	ERREUR
10	22026	1000	22.026
20	4.85E8	8000	60646
30	1.1E13	27000	3.96E8
40	2.4E17	64000	3.7E12
50	5.2E21	125000	4.1E16
60	1.1E26	216000	5.3E20
70	2.5E30	343000	7.3E24
80	5.5E34	512000	1.1E29
90	1.2E39	729000	1.7E33
100	2.7E43	1E6	2.7E37

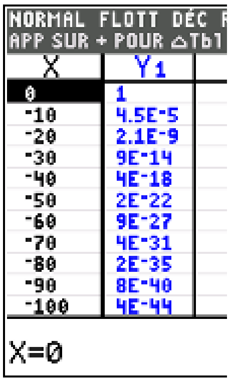
La fonction exponentielle croit en $+\infty$ bien plus vite que la fonction x^3. Le rapport $\frac{e^x}{x^3}$ tend vers $+\infty$.

Exemple quand x tend vers $-\infty$:

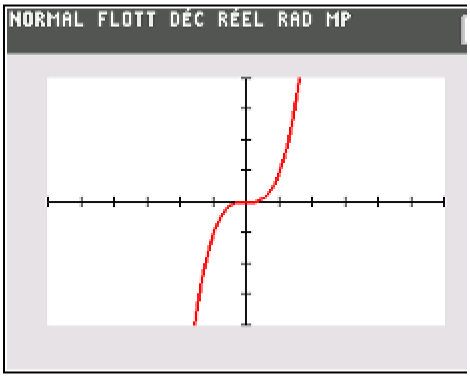
Fonction exponentielle contre fonction x^3

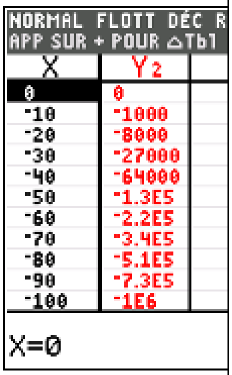
Fonction exponentielle e^x

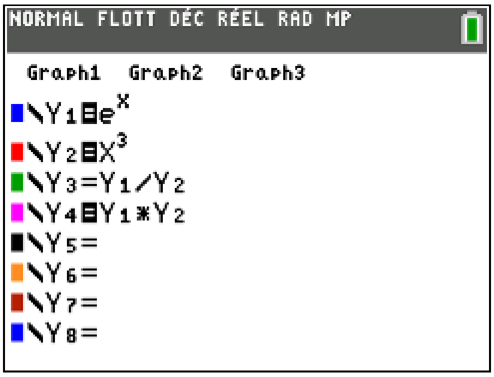


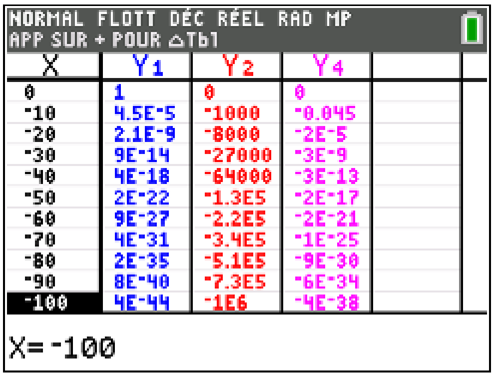


Fonction puissance x^3









La fonction exponentielle s'approche de 0 en $-\infty$ bien plus vite que la fonction x^3. Le produit $e^3 \times x^3$ tend vers 0.

Ces comportements sont les mêmes quelle que soit la puissance.

Théorèmes des croissances comparées

Pour tout entier naturel n,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n . e^x = 0$$

Remarque :

On dit que la fonction exponentielle « l'emporte » sur la fonction puissance.

<u>Démonstration du théorème des croissances comparées en +∞ de e^x et x</u>

- Résultat préalable : montrons que, $\forall x \in [0\,;\,+\infty[,\quad e^x \geq \frac{x^2}{2}$

Cela revient à montrer que $e^x - \frac{x^2}{2} \geq 0$

On pose $\boldsymbol{f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}}$.

Etudions le signe sur $[0\,;\,+\infty[$ de $f(x)$.

Comme on ne peut l'avoir directement alors on étudie le sens de variation de f :

$$f'(x) = e^x - x$$

Etudions le signe sur $[0\,;\,+\infty[$ de $f'(x)$

Comme on ne peut l'avoir directement alors on étudie le sens de variation de f' :

$$f''(x) = e^x - 1$$

On sait que, $\forall x \in [0\,;\,+\infty[,\quad e^x > 1$ c'est-à-dire $e^x - 1 > 0$

alors : $f'(x)$ est croissante sur cet intervalle.

Donc f' admet un minimum en 0 , il vaut $f'(0)$ = 1.

Donc $f'(x) \geq 0$

Donc la fonction *f* est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

De plus, $f(0)$ = 1 donc $f(x) \geq 0$ soit $e^x - \frac{x^2}{2} \geq 0$

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,+\infty[,\quad e^x \geq \frac{x^2}{2}}$$

- Utilisation du théorème de comparaison pour avoir $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$

d'après le résultat préalable, pour tout $x > 0$:

$$\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$$

Donc, d'après le théorème de comparaison :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

<u>Démonstration du théorème des croissances comparées en +∞ de e^x et x^n</u>

On part du résultat précédent :

$$\lim_{X \to +\infty} \frac{(e^X)}{X} = +\infty$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on multiplie par $\frac{1}{n}$:

$$\lim_{X \to +\infty} \frac{(e^X)}{X} \times \frac{1}{n} = +\infty$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on met à la puissance n :

$$\lim_{X \to +\infty} \left(\frac{(e^X)}{X} \times \frac{1}{n} \right)^n = +\infty$$

On fait un changement de variable en posant :

$$X = \frac{x}{n}$$

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)}{\frac{x}{n}} \times \frac{1}{n} \right)^n = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)}{\frac{x}{n}} \times \frac{1}{n} \right)^n = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)}{x} \right)^n = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty}$$

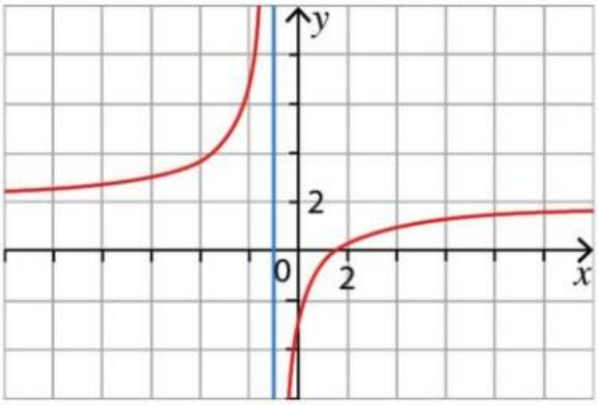
1.9 Interprétation graphique d'une limite

1.9.1 Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées (asymptote verticale)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a\,;b[$ ou $]c\,;a[$ $(a, b, c$ réels)

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe C_f représentative de f.

Exemple



$\lim\limits_{\substack{x \to -0,5 \\ x < -0,5}} f(x) = +\infty$ donc la courbe C_f a pour asymptote verticale la droite d'équation $x = -0,5$

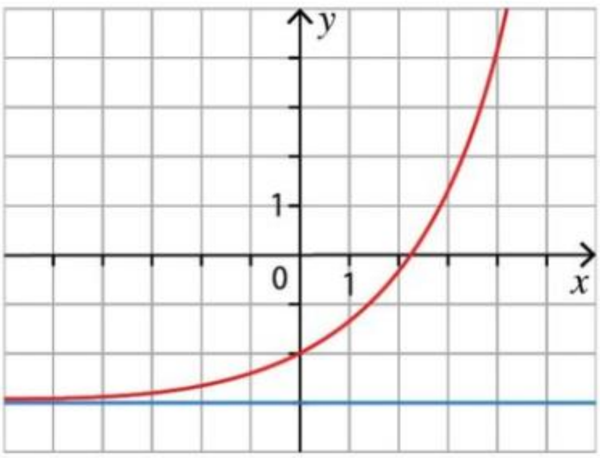
1.9.2 Asymptote parallèle à l'axe des abscisses (asymptote horizontale)

Soit f une fonction définie sur un intervalle] $]a\,;+\infty[$ (respectivement $]-\infty\,;a[$). (a réel)

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$),

alors la droite d'équation $y = b$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f représentative de f en $+\infty$ (respectivement$-\infty$).

Exemple



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$ donc la courbe C_f a pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = -3$

2 Dérivation

2.1 Rappels des formules de dérivation (programme de première)

2.1.1 Fonctions usuelles

Fonction *f*	**Ensemble de définition de *f***	**Dérivée *f* '**	**Ensemble de définition de *f* '**
$f(x) = a, \ \ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax, \ \ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'^{(x)} = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$ $= -nx^{-n-1}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\ ;\ +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;\ +\infty[$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^{kx}, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = ke^{kx}$	$\mathbb{R}$

2.1.2 Formules d'opérations sur les fonctions dérivées

$u + v$ est dérivable sur I	$(u+v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

2.2 Dérivée de la composée de deux fonctions

2.2.1 Définition

On considère la fonction *f* définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$.

La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

$$f\ :\ x \overset{u}{\longmapsto} x-3 \overset{v}{\longmapsto} \sqrt{x-3}$$

Les fonctions u et v sont définies par : $u(x) = x - 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$

On dit que la fonction f est la composée de u par v et on note :

$$f(x) = v \circ u\ (x) = v\big(u(x)\big) = \sqrt{x-3}$$

2.2.2 Formule de dérivation d'une fonction composée

- Soit une fonction u définie et dérivable sur un intervalle I et ayant ses valeurs dans un intervalle J.
- Soit une fonction v définie et dérivable sur un intervalle J.
- La fonction $f = v \circ u$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$f'(x) = u'(x) \times\ v'\big(u(x)\big)$ ou encore $f' = u' \times\ (v' \circ u)$.

On note :

$$\boldsymbol{f' = u' \times v'(u)}$$

Exemples :

Fonction	**Ensemble de définition**	**Dérivée**
$\sqrt{u}$	Condition : il faut que $u(x) > 0$	$u' \times \dfrac{1}{2\sqrt{u}} = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$	Dans le cas où $n < 0$, il faut que $u(x) \neq 0$	$nu^{n-1}u'$
e^u	$\mathbb{R}$	$u'e^u$

3 Convexité

3.1 Dérivée seconde

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I dont la dérivée f' est dérivable sur I.

On appelle **fonction dérivée seconde** de f sur I la dérivée de f' et on note :

$$\boldsymbol{f''(x) = \left(f'(x)\right)'}$$

Exemple

$$f(x) = 3x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x + 4$$

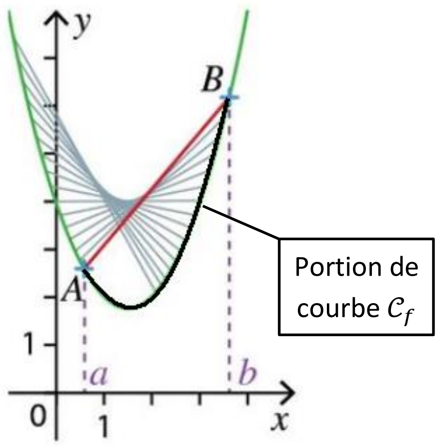
$$f'(x) = 12x^3 - 3x^2 + 10x - 2$$

$$f''(x) = 36x^2 - 6x + 10$$

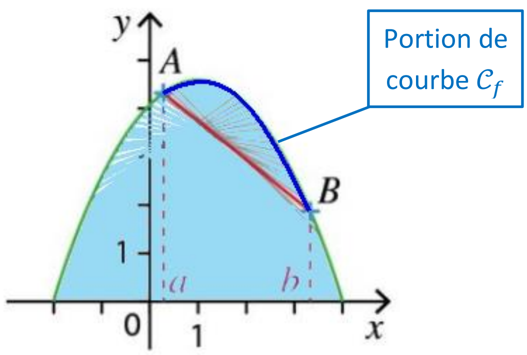
3.2 Fonction convexe et fonction concave

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

- La fonction f est **convexe sur I** si, pour tous réels a et b de I, la **portion de courbe $\mathcal{C}_f$** située entre les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ est **en-dessous de la sécante (AB).**



- La fonction f est **concave sur I** si, pour tous réels a et b de I, la **portion de courbe $\mathcal{C}_f$** située entre les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ **est au-dessus de la sécante (AB).**



Propriété : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout x de I on a $\boldsymbol{f''(x) \geq 0}$ alors la fonction f est **convexe sur I**
- Si pour tout x de I on a $\boldsymbol{f''(x) \leq 0}$ alors la fonction f est **concave sur I.**

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$.

Étudier la convexité de la fonction f.

Réponse :

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = x^2 - 18x$.

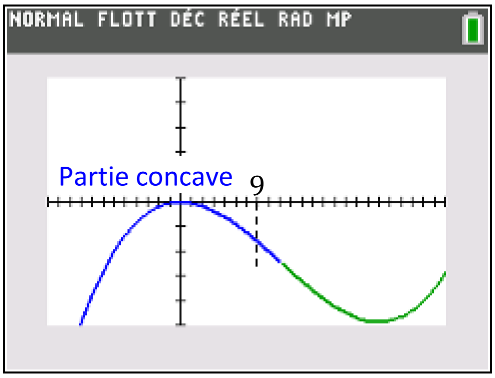
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) = 2x - 18$ qui s'annule pour $x = 9$.

Pour tout $x \leq 9$, $f''(x) \leq 0$.

Pour tout $x \geq 9$, $f''(x) \geq 0$.

x	$-\infty$		9		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	

Donc f est concave sur $]-\infty\,;9]$ et f est convexe sur $[9\,;\,+\infty[$.



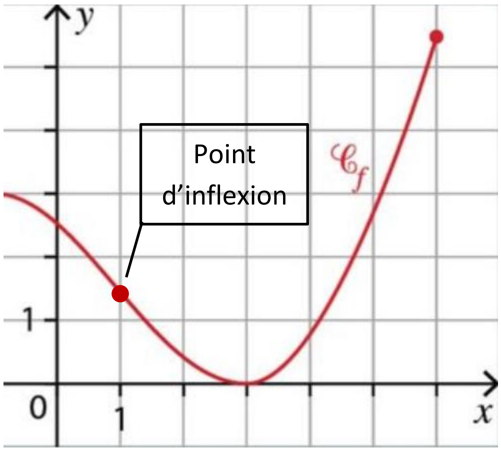
Remarques :

- Si pour tout x de I on a $\boldsymbol{f''(x) \geq 0}$ alors la **dérivée f' est croissante sur I.**
- Si pour tout x de I on a $\boldsymbol{f''(x) \leq 0}$ alors la **dérivée** f' est **décroissante sur I**.

3.3 Point d'inflexion

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.



Remarque :

- Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

Propriétés (admises)

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et a un réel appartenant à I.

- Si f' change de sens de variation en a, alors $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en $x = a$.
- Si $\boldsymbol{f''}$ s'annule **et change de signe** en a, alors $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en $x = a$.

Exemple :

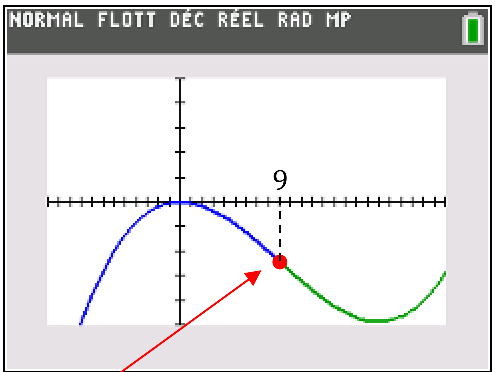
Reprenons l'exemple précédent.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = x^2 - 18x$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) = 2x - 18$

x	$-\infty$		9		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	



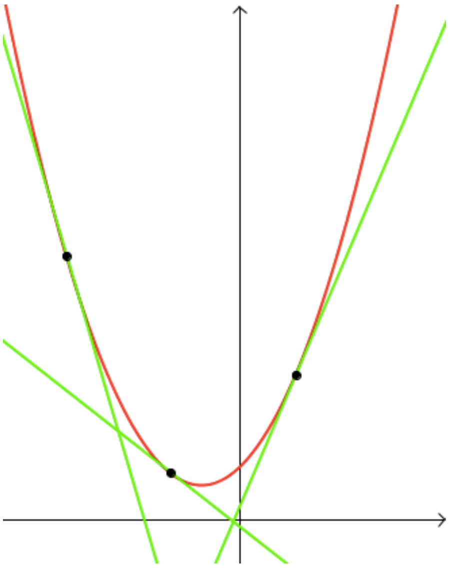
La courbe $\mathcal{C}_f$ a un **point d'inflexion** pour $x = 9$.

3.4 Convexité et tangentes

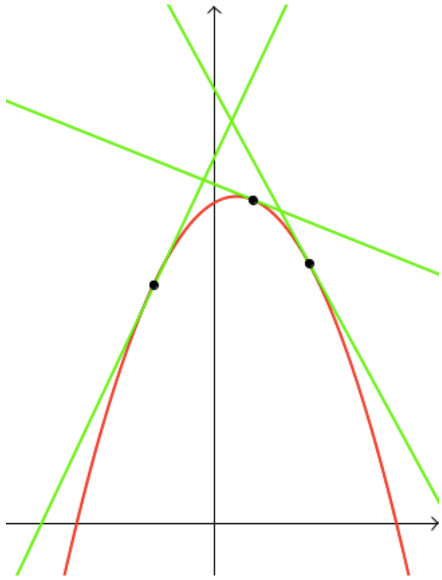
Propriétés

Soient f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. Soit I un intervalle sur lequel f est dérivable.

- Sur l'intervalle I, f est **convexe** si et seulement si $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ **est au-dessus de toutes ses tangentes** .
- Sur l'intervalle I, f est **concave** si et seulement si $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ **est en-dessous de toutes ses tangentes.**

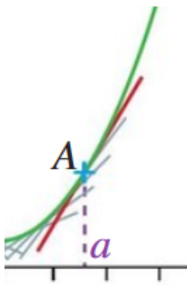


Fonction convexe



Fonction concave

Remarque

	Convexe	Concave
Croissante	 Une fonction **croissante et convexe** sur un intervalle I est une fonction qui **croit « de plus en plus vite »** sur I. Si elle est dérivable sur I, alors les pentes des tangentes à sa courbe représentative augmentent quand les abscisses augmentent.	 Pour une fonction **croissante et concave**, c'est le contraire : elle **croit « de moins en moins vite »**.

4 Continuité

4.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

➢ Dire que f est continue en a signifie que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

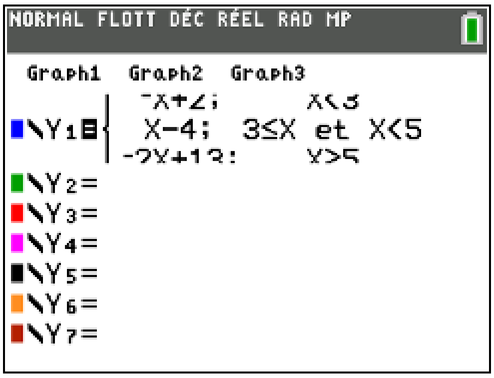
➢ Dire que f est continue sur I signifie que f est continue en tout réel de I.

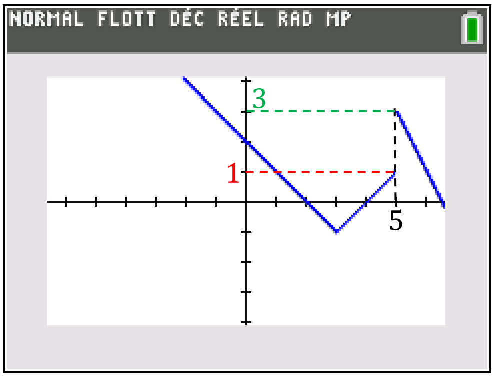
Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x+2, \ pour\ x < 3. \\ x-4, \ pour\ 3 \leq x < 5 \\ -2x+13, \ pour\ x \geq 5 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Réponse : Sur la TI83, dans f(x), choisissez Y_1=. Appuyez sur $\boxed{\text{math}}$ *B :parmorceaux(. Saisissez* **3** *morceaux et* **OK***. Sur chaque ligne saisissez l'expression de la fonction et la condition sur X.*





- D'après la représentation graphique, on peut conjecturer que la fonction f n'est pas continue en $x = 5$. Montrons-le en calculant $f(5)$ puis $\lim_{x \to 5} f(x)$.

Pour calculer $f(5)$ il faut utiliser l'expression $f(x) = -2x + 13$. On a $f(5) = 3$.

Pour calculer $\lim_{x \to 5} f(x)$, il faut calculer la limite à gauche de 5 et la limite à droite de 5.

$$\lim_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} (x-4) = 5-4 = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} (-2x+13) = -10+3 = 3$$

$1 \neq 3$ donc la fonction f n'a pas de limite en $x = 5$. Donc **on n'a pas** $\boldsymbol{\lim_{x \to 5} f(x) = f(5)}$**.**

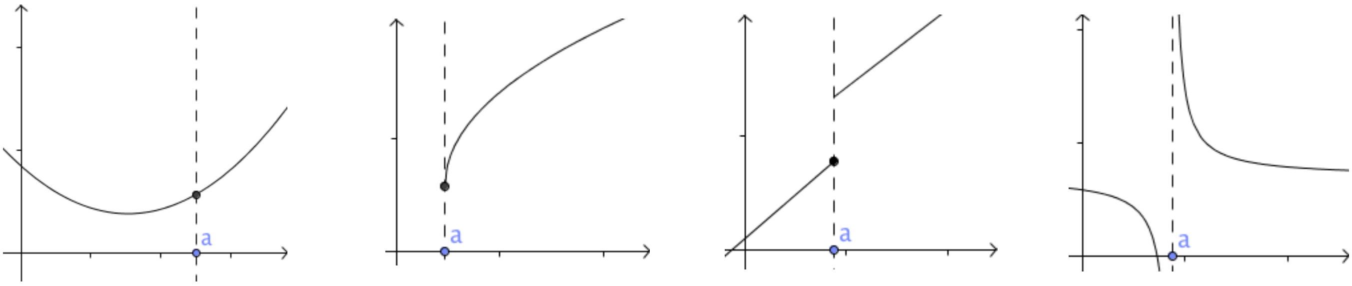
<u>Conclusion :</u> La fonction f **n'est pas continue en** $\boldsymbol{x = 5}$.

4.2 Illustration graphique

La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

Exemples et contre-exemples :

Fonctions continues en a | Fonctions non continues en a



4.3 Fonctions usuelles

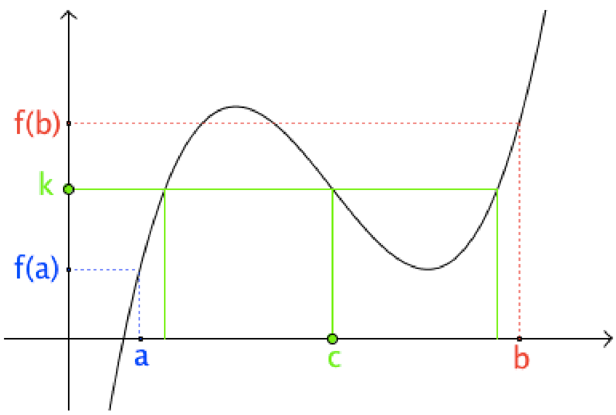
- Les fonctions polynômes, valeur absolue, sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions construites par opération ou par composition à partir des précédentes sont continues sur leur ensemble de définition. Exemple : les fonctions rationnelles

Remarque : Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

4.4 Théorème des valeurs intermédiaires

On considère la fonction *f* définie et continue sur un intervalle [*a* ; *b*].

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



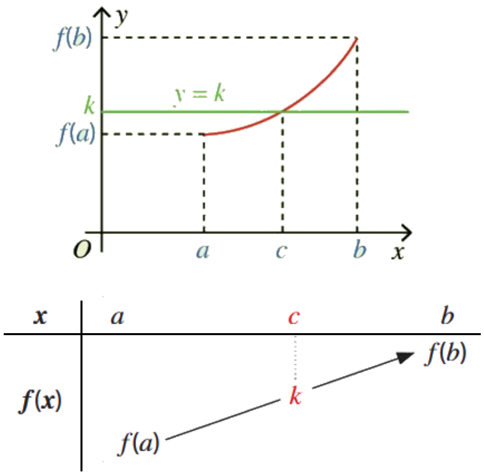
4.5 Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Si sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ on a les trois hypothèses :

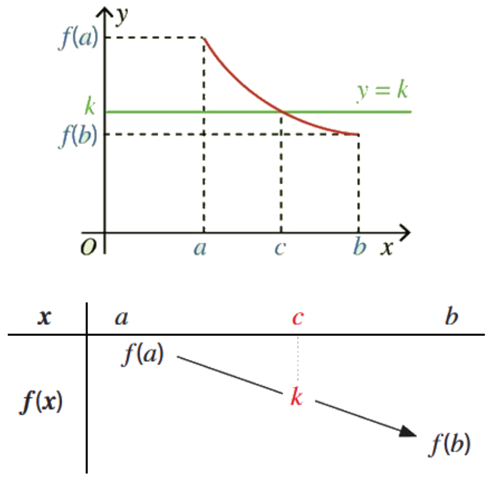
- f est continue
- f est *strictement* monotone
- $k \in [f(a)\ ; f(b)]$ (ou bien $k \in [f(b)\ ; f(a)]$ si la fonction est décroissante)

alors l'équation $f(x) = k$ a *une unique solution* c dans l'intervalle $[a\ ; b]$.

- Cas où f est strictement croissante :



- Cas où f est strictement décroissante :



Exemple

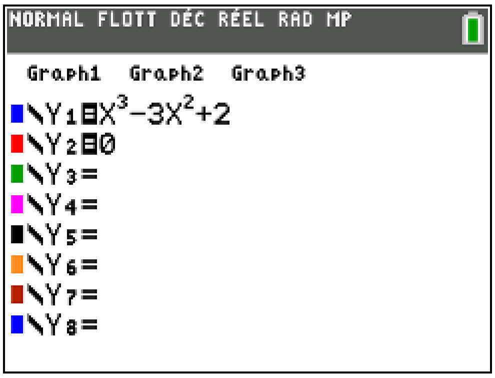
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

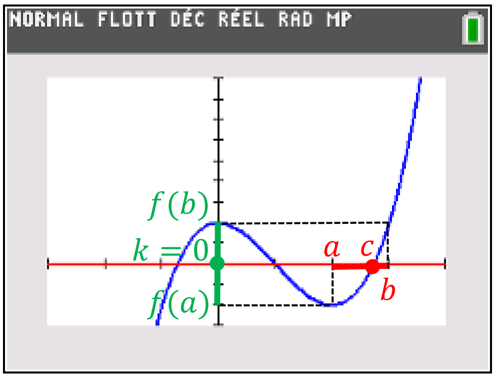
1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution c sur $[2; 3]$.

2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution c.

Réponse :

1) On représente la courbe d'équation $y = f(x)$ et la droite d'équation $y = 0$ sur la calculatrice pour voir comment se présente la fonction.





Sur l'intervalle [2 ; 3] on donne les trois hypothèses nécessaires au corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

- f est continue.
- f est strictement monotone. Justification :

f est dérivable sur [2 ; 3] comme somme de fonctions dérivables et

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 3x(x-2)$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $3x$		$-$	0	$+$			
Signe de $x-2$		$-$			0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

D'après le tableau de variations, f est strictement croissante sur [2 ; 3]

- $f(2) = -2$ et $f(3) = 2$

donc $0 \in [f(a) ; f(b)]$

On conclut :

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a *une unique solution* c dans l'intervalle [2 ; 3].

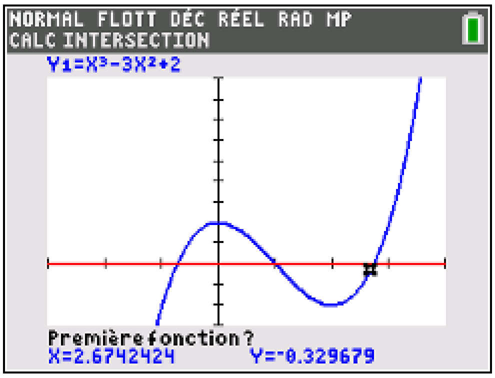
2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution c.

On affiche le graphique

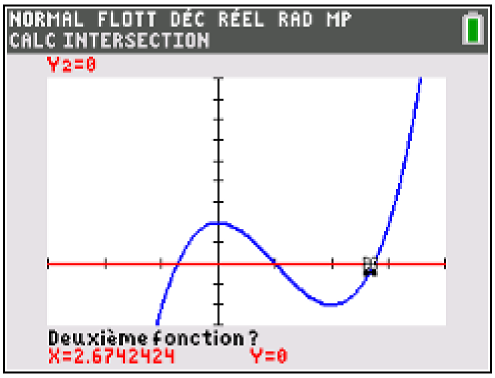
On utilise 2nd calculs

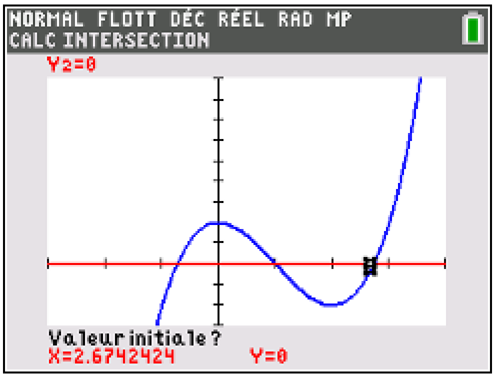
On choisit 5 : intersection

On place le curseur à l'aide des flèches de direction à proximité du point d'intersection d'abscisse c



On appuie trois fois sur **entrer**





La valeur approchée de c apparait lorsqu'on voit « Intersection ».

Donc la réponse est :

$$2{,}73 \leq c \leq 2{,}74$$