CHAPITRE 5 : Fonction logarithme

[1 Fonction logarithme népérien 2](#_Toc57581269)

[1.1 Fonction réciproque de la fonction exponentielle 2](#_Toc57581270)

[1.2 Relation fonctionnelle et propriétés algébriques 4](#_Toc57581271)

[2 Variations et limites de la fonction *ln* 4](#_Toc57581272)

[2.1 Dérivée et variations 4](#_Toc57581273)

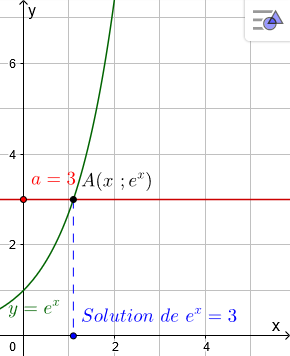
[2.2 Limites 6](#_Toc57581274)

CHAPITRE 5 : Fonction logarithme

# Fonction logarithme népérien

## Fonction réciproque de la fonction exponentielle

***Définition***

* Pour tout réel , l’équation

admet **une solution unique** dans .

Cette solution se note .

Elle s’appelle **le logarithme népérien de .**

Sur l’exemple de la figure ci-contre, on voit que

* La fonction qui, à tout réel , associe le réel s’appelle la fonction logarithme néperien[[1]](#footnote-1). C’est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est définie sur et elle est notée .

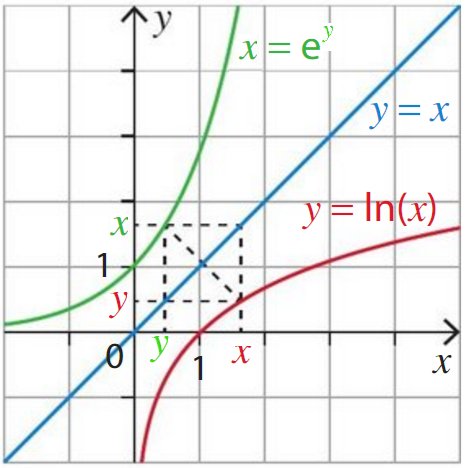
***Remarques sur le langage :***

On dit que la fonction est une bijection de dans .

est elle-même une bijection de dans . C’est la bijection réciproque de

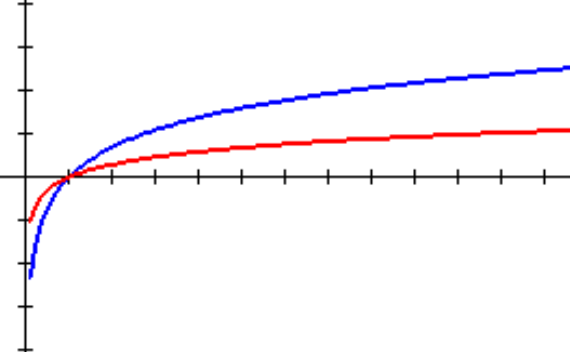
***Conséquences*** :

1. ,
2. ,
3. ,
4. et

***Remarque 1 :*** Leurs courbes représentatives,   
dans un repère orthonormé, sont symétriques   
par rapport à la droite d’équation .

***Remarque 2 :***

En sciences, on utilise aussi la **fonction logarithme décimal, notée log**, définie pour tout



par :

soit approximativement :

***La courbe de la fonction logarithme népérien (en bleu) et de la fonction logarithme décimal (en rouge).***

Elle vérifie les relations et .

## Relation fonctionnelle et propriétés algébriques

Pour tous réels et strictement positifs,

***Propriété (relation fonctionnelle)***

***Propriétés (conséquences de la relation fonctionnelle)***

1. Pour tout ,

# Variations et limites de la fonction *ln*

## Dérivée et variations

***Propriétés***

* La fonction est **continue** sur
* La fonction est **dérivable** sur et pour tout réel de :

Soit une fonction **dérivable** et **strictement positive** sur un intervalle .

|  |  |
| --- | --- |
| La fonction est **dérivable sur** |  |

***Exemple***

Soit la fonction définie sur par . Calculez la dérivée de .

On pose avec et .

***Propriété***

Soit la fonction définie sur , par . On a : .

Donc pour tout , .

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur .

***Conséquences***

pour tous réels et strictement positifs

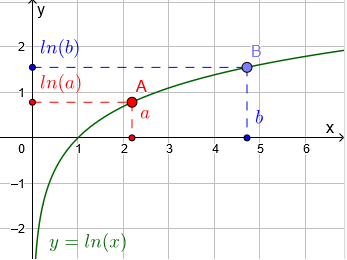
***Exemple :***

Résoudre dans l’équation

* Condition d’existence :
* Pour tout réel , équivaut successivement à :

d’où l’ensemble des solutions

pour tous réels et strictement positifs



***Exemple 1 :***

Résoudre dans l’inéquation

* Condition d’existence :
* Pour tout réel , équivaut successivement à :

d’où l’ensemble des solutions

***Exemple 2 :***

Résoudre dans l’inéquation

* Condition d’existence :
* Pour tout réel , équivaut successivement à :

d’où l’ensemble des solutions

***Exemple 3 :***

Résoudre dans l’inéquation

* Condition d’existence :
* Pour tout réel , équivaut successivement à :

d’où l’ensemble des solutions

## Limites

***Propriétés***

et

***Conséquences***

donc la courbe de la fonction a une asymptote verticale d’équation

Le tableau de variation de la fonction est le suivant :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
| variation de |  |

***Propriétés (croissances comparées)***

Pour tout entier naturel  :

1. **Neper** (John), *baron* **de Merchiston,** mathématicien écossais (Merchiston, près d'Édimbourg, 1550 - 1617). On lui doit l'invention des logarithmes (1614). [↑](#footnote-ref-1)