

CHAPITRE 5 : Fonction logarithme

- 1 Fonction logarithme népérien..... 2
 - 1.1 Fonction réciproque de la fonction exponentielle 2
 - 1.2 Relation fonctionnelle et propriétés algébriques 4
- 2 Variations et limites de la fonction \ln 4
 - 2.1 Dérivée et variations 4
 - 2.2 Limites 6

CHAPITRE 5 : Fonction logarithme

1 Fonction logarithme népérien

1.1 Fonction réciproque de la fonction exponentielle

Définition

- Pour tout réel $a > 0$, l'équation

$$e^x = a$$

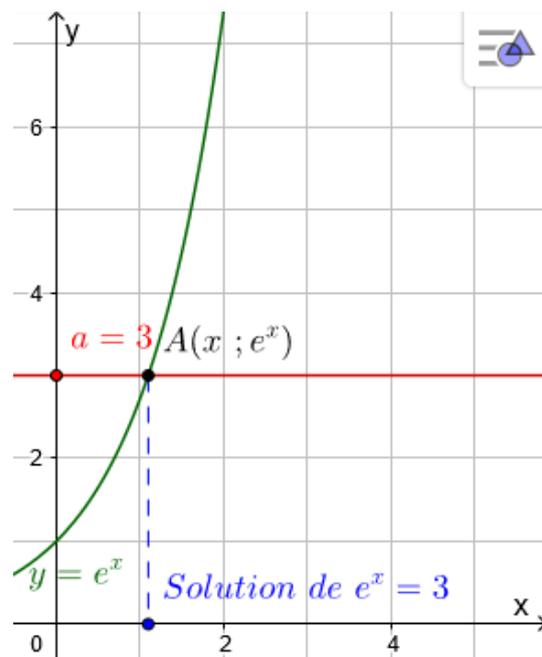
admet **une solution unique** dans \mathbb{R} .

Cette solution se note $x = \ln(a)$.

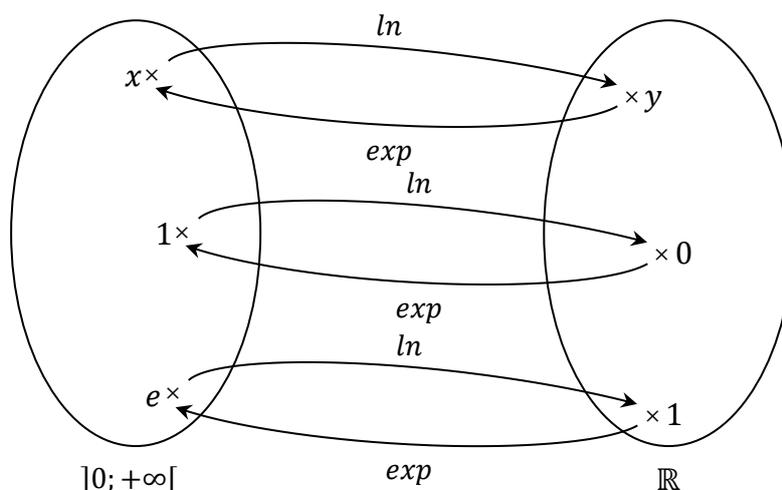
Elle s'appelle **le logarithme népérien de a** .

Sur l'exemple de la figure ci-contre, on voit que

$$\ln(3) \approx 1,1$$



- La fonction qui, à tout réel $x > 0$, associe le réel $y = \ln(x)$ s'appelle la fonction logarithme népérien¹. C'est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est définie sur $]0; +\infty[$ et elle est notée \ln .



¹ **Neper** (John), *baron de Merchiston*, mathématicien écossais (Merchiston, près d'Édimbourg, 1550 - 1617). On lui doit l'invention des logarithmes (1614).

Remarques sur le langage :

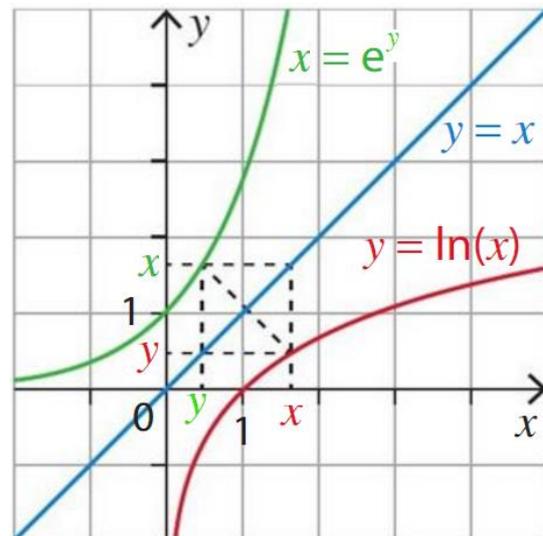
On dit que la fonction exp est une bijection de \mathbb{R} dans $]0; +\infty[$.

ln est elle-même une bijection de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} . C'est la bijection réciproque de exp

Conséquences :

- | |
|---|
| (1) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$ |
| (2) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, e^{\ln(x)} = x$ |
| (3) $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$ |
| (4) $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$ |

Remarque 1 : Leurs courbes représentatives, dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Remarque 2 :

En sciences, on utilise aussi la **fonction logarithme décimal**, notée log , définie pour tout

$x \in]0; +\infty[$ par :

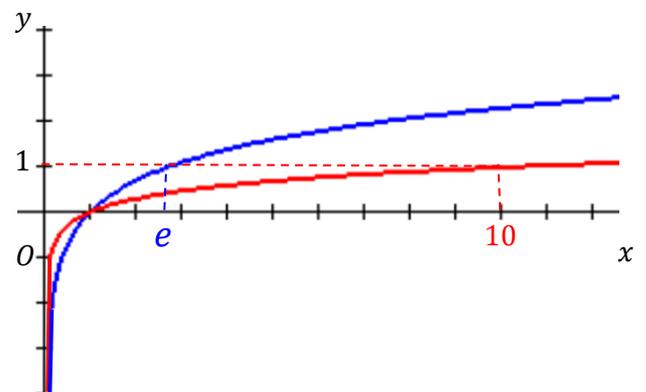
$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

soit approximativement :

$$\log(x) \approx \frac{\ln(x)}{2,303}$$

$$\log(x) \approx \ln(x) \times 0,434$$

Elle vérifie les relations $\log(1) = 0$ et $\log(10) = 1$.



La courbe de la fonction logarithme népérien (en bleu) et de la fonction logarithme décimal (en rouge).

1.2 Relation fonctionnelle et propriétés algébriques

Pour tous réels a et b strictement positifs,

Propriété (relation fonctionnelle)

$$(1) \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Propriétés (conséquences de la relation fonctionnelle)

$$(2) \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$(3) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$(4) \quad \text{Pour tout } n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n \times \ln(a)$$

$$(5) \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

2 Variations et limites de la fonction \ln

2.1 Dérivée et variations

Propriétés

- La fonction \ln est **continue** sur $]0; +\infty[$
- La fonction \ln est **dérivable** sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel x de $]0; +\infty[$: $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$

Soit u une fonction **dérivable** et **strictement positive** sur un intervalle I .

$$\text{La fonction } \ln(u) \text{ est } \mathbf{dérivable sur } I \quad (\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Calculez la dérivée de f .

On pose $f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Propriété

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$, par $f(x) = \ln(x)$. On a : $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Donc pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Conséquences

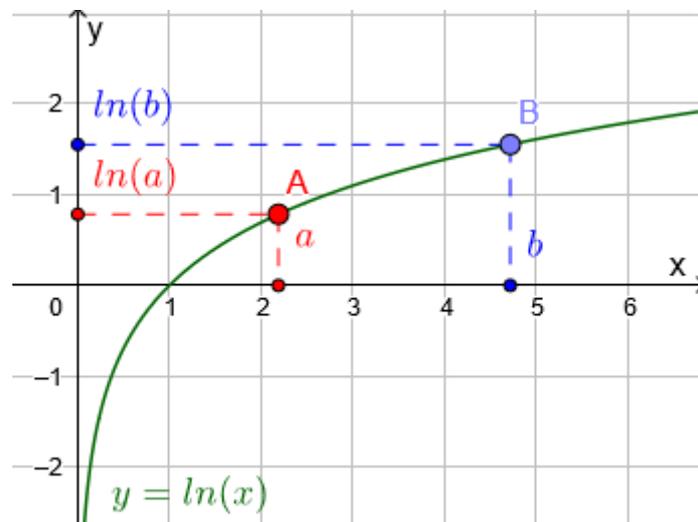
$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b \text{ pour tous réels } a \text{ et } b \text{ strictement positifs}$$

Exemple :

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\ln(x) = 1 + \ln(3)$

- Condition d'existence : $x > 0$
- Pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, $\ln(x) = 1 + \ln(3)$ équivaut successivement à :
 $\ln(x) = \ln(e) + \ln(3)$
 $\ln(x) = \ln(3e)$
 $x = 3e$ d'où l'ensemble des solutions $S = \{3e\}$

$$\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b \text{ pour tous réels } a \text{ et } b \text{ strictement positifs}$$



Exemple 1 :

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\ln(x) < 0$

- Condition d'existence : $x > 0$
- Pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, $\ln(x) < 0$ équivaut successivement à :
 $\ln(x) < \ln(1)$
 $x < 1$
d'où l'ensemble des solutions $S =]0; 1[$

Exemple 2 :

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\ln(x) > 0$

- Condition d'existence : $x > 0$
- Pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, $\ln(x) > 0$ équivaut successivement à :
 $\ln(x) > \ln(1)$
 $x > 1$
d'où l'ensemble des solutions $S =]1; +\infty[$

Exemple 3 :

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\ln(3x + 1) < 2$

- Condition d'existence : $3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$
- Pour tout réel $x \in]-\frac{1}{3}; +\infty[$, $\ln(3x + 1) < 2$ équivaut successivement à :

$$\ln(3x + 1) < \ln(e^2)$$

$$3x + 1 < e^2$$

$$x < \frac{e^2 - 1}{3} \quad \frac{e^2 - 1}{3} \approx 2,130 \quad \text{d'où l'ensemble des solutions } \mathcal{S} =]-\frac{1}{3}; \frac{e^2 - 1}{3}[$$

2.2 Limites

Propriétés

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Conséquences

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ donc la courbe de la fonction \ln a une asymptote verticale d'équation $x = 0$

Le tableau de variation de la fonction \ln est le suivant :

x	0	$+\infty$
$(\ln)'(x)$		+
variation de \ln	$-\infty$	$+\infty$

Propriétés (croissances comparées)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln(x)) = 0$$

Pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^n \cdot \ln(x)) = 0$$