Chapitre 7 : Primitives et équations différentielles

I. Equation différentielle $y' = f$

1/ Activité de découverte :

1/ Déterminer une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $y'(x) = e^x + 3$ autrement dit déterminer une fonction y solution de l'équation différentielle $y' = e^x + 3$.

2/ Déterminer une fonction F dérivable sur $]0\,;+\infty[$ telle que $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$ autrement dit déterminer une fonction F solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$.

2/ Définition de l'équation différentielle $y' = f$:

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction.

On dit qu'une fonction F est solution de l'équation différentielle $y' = f$ sur I lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- ***F* est dérivable sur I**
- **$F' = f$.**

Résoudre sur I l'équation différentielle $y' = f$, c'est déterminer toutes les fonctions F dérivables sur I telles que $F' = f$.

3/ Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle :

Méthode :

Etape 1 : Dire que F est dérivable sur l'intervalle considéré.

Etape 2 : Calculer la dérivée de F et retrouver f.

Exemple : On considère l'équation différentielle $y' = 15x^4 - 2x + 5$ où l'inconnue y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 3x^5 - x^2 + 5x - 1$. Vérifier que F est solution de l'équation différentielle.

II. Primitive d'une fonction

1/ Activité :

On cherche à déterminer une fonction F dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et dont la dérivée est $f(x) = \ln(x)$.

Un logiciel de calcul formel propose cette expression pour $F(x)$.

```
int(ln(x),x)
                                        x*ln(x)-x
```

Démontrer que la fonction F a bien pour dérivée f.

On dit alors que F est une **primitive** de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2/ Définition :

Une primitive d'une fonction f sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Par définition, la recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation, ce qui permet de traiter les cas usuels par lecture inverse du tableau des dérivées.

Exemple : Donner une primitive F sur le domaine I pour chacune des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = 2x$, $I = \mathbb{R}$ b) $f(x) = \frac{1}{x}, I =]0\,;+\infty[$ c) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, $I = \mathbb{R}^*$

3/ Lien avec l'équation différentielle $y' = f$:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On appelle primitive de la fonction f sur I toute fonction solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Résoudre sur I l'équation $y' = f$ revient donc à déterminer toutes les primitives de f sur I.

Exemple :

D'après l'étude précédente, on sait que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 3x^5 - x^2 + 5x - 1$ est solution de l'équation différentielle $y' = 15x^4 - 2x + 5$.

En posant $f(x) = 15x^4 - 2x + 5$, on peut alors affirmer que la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

4/ Propriétés :

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.
- Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors deux primitives de f diffèrent d'une constante. Autrement dit, si F est une primitive de f sur l'intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont les fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + k$ où k est une constante réelle.
- Quels que soient $x_0 \in$ I et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Exemple :

1/ Montrer que la fonction $F: x \longmapsto xe^x$ est une primitive de la fonction $f: x \longmapsto (x+1)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

2/ En déduire l'ensemble des primitives de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

3/ Déterminer la primitive de la fonction f qui s'annule en 1.

III. Primitives des fonctions de référence et opérations

On obtient le tableau des primitives par lecture inverse du tableau des dérivées des fonctions usuelles

Rappel du tableau des dérivées des fonctions usuelles :

Fonction définie par $f(x) = \ldots$	Fonction dérivée $f'(x) = \ldots$	Domaine de dérivabilité
K (constante réelle)	0	
ax (où a est une constante réelle)	a	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{Z}^*$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0 ; +\infty[$
$sin(x)$	$cos(x)$	$\mathbb{R}$
$cos(x)$	$-sin(x)$	$\mathbb{R}$

Tableau des primitives des fonctions de référence par lecture inversée du tableau des dérivées précédent :

Fonction $f : x \mapsto \cdots$	**Une primitive F$: x \mapsto \cdots$**	**Sur :**
a (constante réelle)	ax	$\mathbb{R}$
Méthode 1 : nx^{n-1} ***Méthode 2 : x^n*** **avec n est un entier relatif différent de 0 et -1**	x^n $\frac{x^{n+1}}{n+1}$	**$\mathbb{R}$ si $n > 0$** **$\mathbb{R}^*$ si $n < -1$**
$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$]0 ; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$ln(x)$	$]0 ; +\infty[$
$cos(x)$	$sin(x)$	$\mathbb{R}$
$sin\ (x)$	$-cos(x)$	$\mathbb{R}$

Rappel des dérivées en lien avec les opérations sur les fonctions :

	Fonction à dériver	Fonction dérivée
1	$u + v$	$(u + v)' = u' + v'$
2	$k \times u$ **avec** $k \in \mathbb{R}$.	$(k \times u)' = k \times u'$
3	$u \times v$	$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
4	$\frac{1}{v}$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$
5	$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

Par lecture inverse des lignes 1, 2 et 4 du tableau des dérivées précédent, on obtient :

Soient u et v deux fonctions admettant respectivement des fonctions U et V comme primitives sur un intervalle I.

Fonction $f: x \longmapsto \cdots$	**Une primitive F: $x \longmapsto \cdots$**	**Sur :**
$\boldsymbol{u + v}$	$\boldsymbol{U + V}$	**I**
$k \times u$, pour tout réel k	$\boldsymbol{k \times U}$	**I**

On a aussi :

Fonction $f: x \longmapsto \cdots$	**Une primitive F: $x \longmapsto \cdots$**	**Sur :**
$\boldsymbol{\frac{-v'}{v^2}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{v}}$	**Pour tout x de I tels que $v(x) \neq 0$**

Contrairement à la dérivation, il n'existe aucune formule permettant de calculer une primitive du produit ou du quotient de deux fonctions. Les lignes 3 et 5 du tableau des dérivées ne permettent pas de donner des formules de primitives.

Exemple :

1/ Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x - 7$.

2/ Déterminer une primitive G de la fonction g définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $g(x) = \frac{2}{x} + 4x^3 + \frac{1}{x^4} + 2$.

3/ Déterminer une primitive H de la fonction h définie sur $]-\infty\ ;-0{,}5[\cup]-0{,}5\ ;+\infty[$ par $h(x) = \frac{2}{(2x+1)^2}$.

IV. Primitives de fonctions composées

Le tableau donnant les formules de calcul de dérivées des fonctions composées permet d'établir le tableau des primitives par lecture inversée. On considère que u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction à dériver	Fonction dérivée
u^n	$\boldsymbol{n \times u' \times u^{n-1}}$
$\sqrt{u}$	$\boldsymbol{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$
$e^{u(x)}$	$\boldsymbol{u'(x)e^{u(x)}}$
$ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$

Fonction $f: x \longmapsto \cdots$	**Une primitive F: $x \longmapsto \cdots$**	**Conditions**
Méthode 1 : $n\,u'u^{n-1}$ ***Méthode 2 : $u' \times u^n$*** **avec $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ et $n \neq -1$**	$\boldsymbol{u^n}$ $\boldsymbol{\frac{u^{n+1}}{n+1}}$	**Si $n < -1$, alors il faut que $u(x) \neq 0$ pour tout x de I**
$\boldsymbol{\frac{u'}{u}}$	$\boldsymbol{ln}\,(\lvert\boldsymbol{u}\rvert)$	**$u(x) \neq 0$ pour tout x de I**
$\boldsymbol{\frac{u'}{2\sqrt{u}}}$	$\boldsymbol{\sqrt{u}}$	**$u(x) > 0$ pour tout x de I**
$\boldsymbol{u'e^u}$	$\boldsymbol{e^u}$	
$\boldsymbol{u' \times (v' \circ u)}$	$\boldsymbol{v \circ u}$	**v est dérivable sur un intervalle J et pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J**

Exemple : Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I :

1/ $f(x) = e^{-2x}$, $I = \mathbb{R}$

2/ $f(x) = \frac{x^2}{x^3+5}$, $I =]0 ; +\infty[$

3/ $f(x) = (2x+1)(x^2+x-7)^5$, $I = \mathbb{R}$

4/ $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-5}}$, $I = \mathbb{R}$

5/ $f(x) = \cos(x)(\sin(x))^2$, $I = \mathbb{R}$.

Pour certaines fonctions on ne peut pas trouver une primitive à l'aide des différents tableaux de primitives. L'expression d'une primitive sera proposée dans l'énoncé et il faudra la vérifier.

Exemple : On considère la fonction F dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et définie par $F(x) = (x+1)ln(x+1) - 3x + 7$. Montrer que pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, F est une primitive de la fonction f telle que $f(x) = ln(x+1) - 2$.

V. Ensemble des solutions d'une équation différentielle $y' = ay$, solution avec condition initiale

1/ Activité :

Partie 1 : Equation $y' = y$

1/ Quelle fonction usuelle et non nulle est solution de l'équation $y' = y$?

2/ Si une fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = y$, la fonction kf où k est un réel quelconque est-elle aussi solution de l'équation $y' = y$?

3/ En déduire d'autres solutions de $y' = y$.

Partie 2 : Equation $y' = ay$

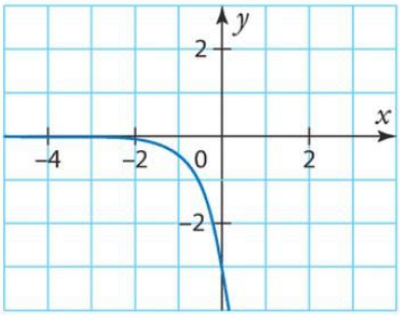
1/ Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = e^{3x}$ est solution de l'équation $y' = 3y$. En déduire d'autres solutions de l'équation.

2/ Proposer des solutions des équations $y' = 5y$.

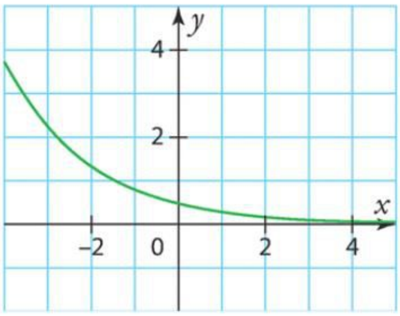
3/ Associer chaque fonction f ci-dessous à sa courbe représentative et donner l'équation différentielle dont elle est solution. Que peut-on dire de l'allure des courbes des fonctions $x \longmapsto Ke^{ax}$ selon le signe de K et a ?

a) $f(x) = -3e^{2x}$ **b)** $f(x) = 0,5e^{x}$ **c)** $f(x) = 0,5e^{-2x}$ **d)** $f(x) = -3e^{-2x}$ **e)** $f(x) = 0,5e^{-0,5x}$

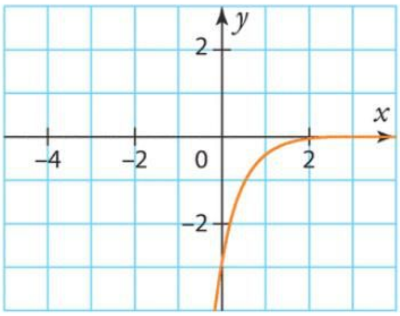
①



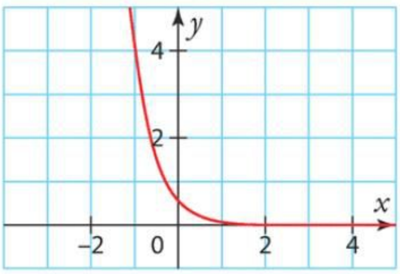
②



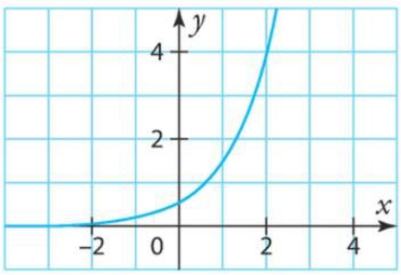
③



④



⑤



2/ Théorème :

Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ où a est un réel non nul ont pour solutions les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ke^{ax}$ où K est une constante réelle.

3/ Démonstration du théorème :

Etape 1 : Vérifier que toute fonction d'expression $f(x) = Ke^{ax}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

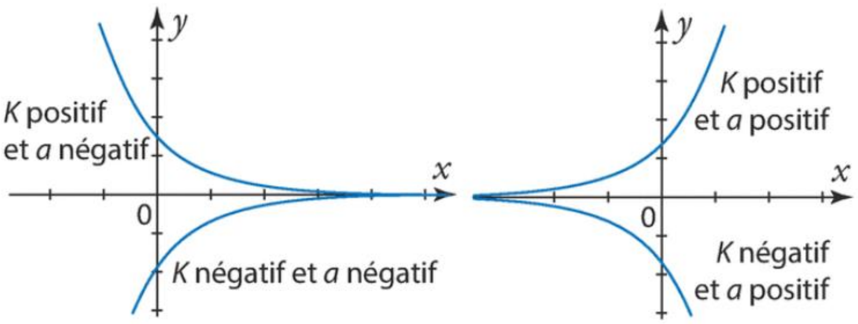
Etape 2 : Réciproquement, il faut prouver que toute solution est de cette forme.

On considère la fonction g qui est une solution de l'équation $y' = ay$ ainsi que la fonction t définie par :

$t(x) = g(x)e^{-ax}$.

Montrer que $t'(x) = 0$ pour tout réel x et conclure.

4/ Allure des courbes des fonctions d'expressions Ke^{ax} :



5/ Exemple théorique :

a) Résoudre l'équation différentielle $3y' = 2y$.
b) Donner l'allure des courbes solutions.
c) Déterminer l'unique solution f telle que $f(1) = e$.

6/ Exemple concret :

Pendant le premier mois de croissance du cotonnier, la vitesse de croissance (en g/jour) est proportionnelle au poids P du moment t en jours. Le coefficient de proportionnalité est de 0,21.

a/ Traduire l'énoncé par une équation différentielle.

b/ Déterminer la forme de la fonction P.

c/ Evaluer le poids d'une plante de coton à la fin du mois ($t = 30$) si la plante pesait 70 mg au début du mois.

VI. Ensemble des solutions d'une équation $y' = ay + b$, solution avec condition initiale

1/ Activité :

1/ Montrer que l'équation différentielle (E) : $y' = 3y + 5$ se ramène à l'équation différentielle :

$(y + \frac{5}{3})' = 3(y + \frac{5}{3})$.

2/ Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f + \frac{5}{3}$ est solution de $y' = 3y$. Donner alors les solutions de l'équation différentielle (E).

3/ On considère l'équation différentielle $y' = ay + b$ où a et b sont des réels non nuls. Quelles solutions peut-on donner à cette équation ?

2/ Propriété :

Soient a et b deux nombres réels non nuls. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$.

(E) admet une unique solution particulière constante qui est la fonction $x \mapsto -\frac{b}{a}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions f d'expressions $f(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où K est une constante réelle.

Quels que soient les nombres réels x_0 et y_0 l'équation (E) admet une unique solution g vérifiant la condition initiale $g(x_0) = y_0$.

3/ Propriété :

Soient a un nombre réel et f une fonction définie sur un intervalle I.

Soient (E) l'équation différentielle $y' = ay + f$ et g une fonction particulière de (E) sur I. Les solutions de (E) sur I sont les fonctions $x \mapsto K\,e^{ax} + g(x)$ où K est une constante.

4/ Exemple concret :

On sort un gratin du four. Le plat est à 100 °C. La température du plat est donnée par la fonction g dépendant du temps t exprimé en minutes, qui est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}04y = 0{,}8$.

a/ Donner les solutions de l'équation différentielle (E).

b/ Donner la solution g définie par la condition initiale $g(0) = 100$.

c/ Combien de temps faut-il attendre pour que le plat soit à 37 °C ?