Terminale 4 Lundi 7 décembre 2020.

Test de Mathématiques n° 3 (1 h)

EXERCICE 1 (10 points)

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel. Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant. Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.

À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;20]$ par :

$$f(t) = (0{,}8t + 0{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03.$$

On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;20]$.

Ainsi, la valeur $f(0) = 0{,}23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

x	0		1,75		20
$f'(t)$		+	0	−	
f	0,23	↗		↘	

1. Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.

a. Calculer $f(20)$.

b. Déterminer le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience.

2. On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.

a. Justifier qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition.

b. On considère l'algorithme suivant :

```
t ← 1,75
p ← 0,1
V ← 0,7
Tant que V > 0,035
        t ← t + p
        V ← (0,8t + 0,2) e^(−0,5t) + 0,03
```

Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme ?

Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?

EXERCICE 2 (10 points)

Une entreprise produit en grande série des clés USB pour l'industrie informatique. On admet que 1,5 % des clés produites sont défectueuses.

On prélève au hasard 100 clés dans la production de la journée pour vérification. La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 clés.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de clés défectueuses de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer les probabilités :

a. $P(X = 0)$; **b.** $P(X = 1)$.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux clés soient défectueuses.

4. On considère la fonction Python ci-dessous.

La fonction binomiale(k,n,p) renvoie la valeur de la probabilité de $P(X = k)$ lorsque X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

```python
def seuil(n,p,S):
    k=0
    T=(1-p)**n
    while T<S:
        k=k+1
        T=T+binomiale(k,n,p)
    return k
```

On a exécuté la fonction dans la console et obtenu le résultat suivant.

```
>>> seuil(100,0.015,0.9999)
8
```

Expliquer ce que représente le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.