20 TTEST3

$f(t) = (0{,}8t + 0{,}2)\,e^{-0{,}5t} + 0{,}03$ avec $t \in [0;20]$

$f(t)$ est le taux en pourcentage de CO_2 dans le local clos
t est le temps en minute.

1) a) $f(20) = (0{,}8 \times 20 + 0{,}2)\,e^{-0{,}5 \times 20} + 0{,}03$
$f(20) = 0{,}0307$ donc, arrondi au millième, $\underline{f(20) = 0{,}031}$

b) D'après le tableau de variation donné dans l'énoncé, le taux maximal est $f(1{,}75) = (0{,}8 \times 1{,}75)\,e^{-0{,}5 \times 1{,}75} + 0{,}03$
$\underline{f(1{,}75) = 0{,}697}$ arrondi au millième
soit $\underline{69{,}7\,\%}$

2) a) On cherche à montrer que l'équation $f(t) = 0{,}035$ a une unique solution T dans $[0;20]$

- Si $t \in [0 ; 1{,}75]$ alors :
  D'après le tableau de variation, f est strictement croissante.
  Donc $0 < t$
  $f(0) < f(t)$
  $0{,}23 < f(t)$
  donc l'équation $f(t) = 0{,}035$ n'a pas de solution dans cet intervalle.

- Si $t \in [1{,}75 ; 20]$ alors :
  * D'après le tableau de variation, f est strictement décroissante.
  * De plus f est continue sur cet intervalle
  * $f(20) = 0{,}031$.
  $f(1{,}75) = 0{,}697$.
  donc $\underline{0{,}035 \in [f(20) ; f(1{,}75)]}$
  D'après la conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 0{,}035$ admet une unique solution T dans l'intervalle $[1{,}75 ; 20]$.

b) L'algorithme initialise t à $1{,}75$ et V à $0{,}7$
A chaque tour de boucle Tant que, la valeur de t est incrémentée de $0{,}1$ et $V(t)$ est calculée.

On sort de la boucle Tant que la première fois que la condition $V > 0{,}035$ devient fausse, c'est à dire que $V \leq 0{,}035$.

Donc la valeur de t affichée est visible en faisant la table :

Debut Tbl = 1,75
ΔTbl = 0,1
Indpnt : Auto
Depndte : Auto

X	Y1
⋮	
15,55	0,0353
15,65	0,0351
15,75	0,0349 ←

Donc la valeur affichée est $\underline{t = 15{,}75}$

A $t = 15{,}75$ minute, le taux de CO_2 devient pour la première fois inférieur à $3{,}5\,\%$.

Exercice 2

1) Il s'agit d'un prélèvement assimilé à un tirage avec remise.
Donc les tirages sont indépendants.
Chaque tirage a deux issues : "succès" : la clé est défectueuse avec $p = 0{,}015$
"échec" : la clé n'est pas défectueuse.
Donc X qui compte le nombre de clés défectueuses sur un lot de $n = 100$ clés suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}015$

2) a) $P(X=0) = 0{,}221$ arrondi à 10^{-3} près La formule est $P(X=0) = \binom{100}{0} p^0 q^{100}$

b) $P(X=1) = 0{,}336$ arrondi à 10^{-3} près

3) On cherche $P(X \leq 2)$
A la calculatrice, on a $P(X \leq 2) = 0{,}810$ arrondi à 10^{-3} près

4) seuil(100, 0.015, 0.9999) est un appel à la fonction seuil avec les paramètres
$n = 100$ $p = 0{,}015$ $S = 0{,}9999$

On fait fonctionner à la main le programme pour voir ce qu'il fait :

n	p	S	k	T	condition T<S
100	0,015	0,9999			
			0		
				P_0	
					VRAIE
			1		
				P_0+P_1	
					VRAIE

début du 1er tour de boucle →

$T = (1-0{,}015)^{100} = P(X=0)$
$T = p_0 \approx 0{,}221$

$P(X=1) = \text{binom}(1, 100, 0{,}015)$
$P(X=1) = p_1$
$T = P(X \leq 1) \approx 0{,}557$

On sort de la boucle quand la condition $T < S$ devient FAUSSE, c'est à dire quand $T \geq S$ la première fois

Le résultat k retourné est le nombre de clés défectueuses dans le lot de 100 clés tel que $P(X \leq k)$ dépasse 0,9999 pour la première fois.

On trouve $k = 8$ (d'après l'énoncé)
Cela signifie que la probabilité que dans un prélèvement de 100 clés, au plus 8 clés soient défectueuses dépasse 99,99%

- On peut retrouver ce résultat en faisant une liste à la calculatrice :
- On a la probabilité $P(X \leq k)$ que le nombre de clés défectueuses dans un lot de 100 ne dépasse pas k
- Cette probabilité devient supérieure ou égale à 99,99% la première fois pour $k = 8$

k	$P(X \leq k)$
0	0,22061
1	0,55656
2	0,80981
3	0,93578
4	0,98231
5	0,99591
6	0,99919
7	0,99986
8	0,99998 $\geq$ 0,9999