

n°84 p37

La suite (u_n)

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad u_1 &= 3u_0 - 2(0) + 3 \\ u_1 &= 3 \times 0 - 2 \times 0 + 3 = \underline{3} \\ u_2 &= 3u_1 - 2(1) + 3 \\ u_2 &= 3 \times 3 - 2 + 3 = \underline{10} \end{aligned}$$

2) Soit $P(n)$ la proposition $u_n \geq n$ • Initialisation $0 \geq 0$ donc $u_0 \geq 0$. $P(0)$ est vraie• Hérédité. Soit k un certain entier naturel.Supposons que $u_k \geq k$. Montrons qu'il doit $u_{k+1} \geq k+1$ On construit u_{k+1} :

$$3u_k \geq 3k$$

$$3u_k - 2k + 3 \geq 3k - 2k + 3$$

$$u_{k+1} \geq k+3 \text{ donc } u_{k+1} \geq k+1$$

• Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, \underline{u_n \geq n}$ 3) Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n - 2n + 3$$

$$u_{n+1} - u_n = 2(u_n - n) + 3$$

$$\text{d'après la question 2 on a } u_n \geq n$$

$$u_n - n \geq 0$$

$$\text{donc } 2(u_n - n) \geq 0$$

$$2(u_n - n) + 3 \geq 0$$

$$\text{d'où } u_{n+1} - u_n \geq 0$$

$$u_{n+1} \geq u_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

$$4) a) V_n = u_n - n + 1$$

$$V_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1$$

$$V_{n+1} = u_{n+1} - n$$

Montrons qu'il existe un réel $q \neq 0$ tel que $V_{n+1} = q V_n$

$$V_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 - n$$

$$V_{n+1} = 3u_n - 3n + 3$$

$$V_{n+1} = 3(u_n - n + 1)$$

$$V_{n+1} = 3V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc (V_n) est géométrique de 1^{er} terme $V_0 = 1$ de raison $q = 3$.b) On en déduit que $V_n = V_0 \times q^n$

$$V_n = 3^n$$

$$\text{d'où, puisque } u_n = V_n + n - 1, \text{ on a } \underline{u_n = 3^n + n - 1}$$

$$\begin{aligned} c) \quad \sum_{k=0}^{100} u_k &= (3^0 + 0 - 1) + (3^1 + 1 - 1) + (3^2 + 2 - 1) + \dots + (3^{100} + 100 - 1) \\ &= (3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{100}) + ((0-1) + (1-1) + (2-1) + \dots + (100-1)) \\ &= \sum_{k=0}^{100} 3^k + \sum_{k=-1}^{99} k \\ &= \frac{1-3^{101}}{1-3} + \frac{((-1) + (99))(101)}{2} \\ &= \frac{3^{101}-1}{2} + \frac{98 \times 101}{2} = \underline{\underline{\frac{3^{101} + 9897}{2}}} \end{aligned}$$

d)

Somme $\leftarrow 0$ Pour k allant de 0 à 100Somme $\leftarrow$ Somme $+ 3 \times k$ Pour k allant de -1 à 99Somme $\leftarrow$ Somme $+ k$