

Exercice : *Recherche d'une forme explicite à l'aide d'une suite auxiliaire*

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3000 cétacés dans cette réserve marine au 1^{er} juin 2017. Le classement de la zone en réserve marine ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés devient inférieur à 2000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel chaque année :

- Entre le 1^{er} juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve.
- Entre le 1^{er} novembre et le 31 mai, la réserve perd 5% de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui le précède.

Selon ce modèle, pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$, u_n désigne le nombre de cétacés au 1^{er} juin de l'année 2017 + n . On a donc $u_0 = 3000$.

1) Justifier que $u_1 = 2926$.

2) Justifier que pour tout nombre entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 76$$

3) On désigne par (v_n) la suite définie, pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 1520$.

- Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,95$ dont on précisera le premier terme.
- En déduire que, pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$$

4) a) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés dans la réserve sera inférieur à 2000.

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 3000$
Tant que ...
$n \leftarrow \dots$
$u \leftarrow \dots$
Fin Tant que
Afficher n

b) Quelle est la valeur de n à la fin de l'algorithme ?

c) En quelle année le nombre de cétacés sera inférieur à 2000 ?