23 TDS1 Exercice 1

1)

$$u_n = \frac{1+2^n}{3+5^n}$$ indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$

Pour lever l'indétermination, on factorise par le terme dominant, ici 5^n.

$$u_n = \frac{5^n\left(\frac{1}{5^n}+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{5^n\left(\frac{3}{5^n}+1\right)}$$

On simplifie :
$$u_n = \frac{\frac{1}{5^n}+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{3}{5^n}+1}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{5^n}=0$ $\quad -1<\frac{2}{5}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{5^n}=0$

donc $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)=0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5^n}+1\right)=1\end{array}\right\}$ donc, par quotient, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0}$

<u>réponse c</u>

2) Les scripts a) et b) initialisent $S=0$ donc ils peuvent convenir. Le script b) affecte à la nouvelle valeur de S l'ancienne valeur de S $+\frac{1}{k+1}$ avec k variant de 0 à 99. Donc il convient.

<u>réponse b</u>

3) La suite (u_n) est minorée par 3 et converge vers un réel l.
- On ne peut rien dire sur son sens de variation.
- On peut dire que $3 \leq l$. <u>réponse b</u>

4) (w_n) : $\begin{cases} w_1 = 2 \\ w_{n+1} = \frac{1}{n} w_n \ , \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

$\frac{1}{n}$ n'est pas une constante, donc la suite n'est pas géométrique.

On programme la suite à la calculatrice.
On obtient la table :

n	w_n
1	2
2	2
3	1
4	$\frac{1}{3}$
5	$\frac{1}{12}$

$w_5 \neq \frac{1}{15}$

- Etudions le sens de variation de (w_n).
Pour cela étudions le signe de $w_{n+1}-w_n$

$$w_{n+1}-w_n = \frac{1}{n}w_n - w_n$$

$$w_{n+1}-w_n = w_n\left(\frac{1}{n}-1\right)$$

$n\geq 1$ donc $\frac{1}{n}\leq 1$ $\quad \frac{1}{n}-1\leq 0$

D'après la définition de la suite (w_n), $w_n>0$ $\forall n \in \mathbb{N}$
donc $w_{n+1}-w_n\leq 0$. (w_n) est décroissante.
Donc elle converge. <u>Réponse d</u>

Exercice 2

1) a) $u_n = 3n - n^2$ a la même limite que $-n^2$ qui est le monôme de plus haut degré

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

b) $v_n = \dfrac{n^3+2n}{5n^3+1}$ a la même limite que $\dfrac{n^3}{5n^3}$ qui est le quotient des monômes de plus haut degré

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 5n^3 = +\infty$

$\}$ Forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$.

On simplifie pour lever la forme indéterminée :

$$\frac{\cancel{n^3}}{5\cancel{n^3}} = \frac{1}{5}$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{5}$

c) $w_n = n^3 + (-1)^n$

On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$

Mais on ne peut pas utiliser la limite d'une somme car $(-1)^n$ n'a pas de limite.

On va utiliser une comparaison :

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$n^3 - 1 \leq n^3 + (-1)^n \leq n^3 + 1$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (n^3 - 1) = +\infty$

Donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$

2) $\dfrac{1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n} = 0$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exercice 3 Partie A

$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 400 \\ u_{n+1} = 0,9\,u_n + 60 \quad , \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) $u_1 = 0,9\,u_0 + 60$
$u_1 = 0,9 \times 400 + 60$
$\underline{u_1 = 420}$

$u_2 = 0,9\,u_1 + 60$
$u_2 = 0,9 \times 420 + 60$
$\underline{u_2 = 438}$

b) D'après les premiers termes 400, 420, 438 on conjecture que la suite est croissante.

2) Soit la proposition $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600$.

- Initialisation $0 \leq 400 \leq 420 \leq 600$
$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 600$
la proposition est vraie pour $n=0$.

- Hérédité
Supposons que pour un certain entier k on ait :
$0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 600$
On a donc :
$0,9 \times 0 \leq 0,9\,u_k \leq 0,9\,u_{k+1} \leq 0,9 \times 600$
$0 + 60 \leq 0,9\,u_k + 60 \leq 0,9\,u_{k+1} + 60 \leq 540 + 60$
$0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 600$
la proposition est héréditaire.

- Conclusion : $\underline{0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600 \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}}$

3) la boucle while a comme condition u <= seuil.
Donc, dès que u > seuil, la boucle se termine et la valeur de n est renvoyée.

Si on programme la suite (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 400 \\ u_{n+1} = 0,9\,u_n + 60 \end{cases}$
sur la calculatrice, alors on obtient :

n	u_n
0	400
1	420
2	438
3	454,2
4	468,78
5	481,9
6	493,71
7	504,34

la première fois que le seuil = 500 est dépassé est pour n = 500.
Donc mystère(500) <u>renvoie 7.</u>

Partie B

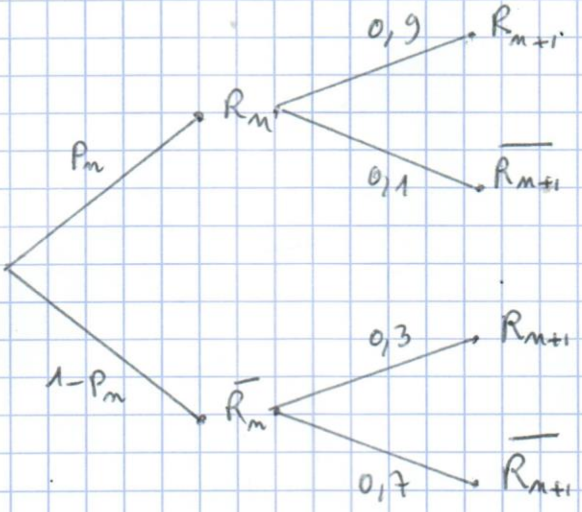
Soit la suite (a_n) dont les termes sont les nombres d'arbres l'année $2023+n$.

D'après l'énoncé $\begin{cases} a_0 = 400 \\ a_{n+1} = 0,9\, a_n + 60 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

C'est la même suite que la suite (a_n).
Donc au bout de $n = 7$ ans $a_n > 500$ (d'après la question 4 de la partie A).
Donc la place limitée à 500 arbres va lui manquer.

Exercice 4

1)



2) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(R_{n+1}) = 0,9\,p_n + 0,3(1-p_n)$$

ce qui s'écrit aussi $p_{n+1} = 0,9\,p_n + 0,3 - 0,3\,p_n$

$$p_{n+1} = 0,6\,p_n + 0,3 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

avec $p_0 = 0,6$

3) a) $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,75$

$u_{n+1} = 0,6\,p_n + 0,3 - 0,75$

On a $p_n = u_n + 0,75$ donc $u_{n+1} = 0,6(u_n + 0,75) + 0,3 - 0,75$

$u_{n+1} = 0,6\,u_n + 0,45 + 0,3 - 0,75$

$u_{n+1} = 0,6\,u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc la suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = p_0 - 0,75$, $u_0 = -0,15$ et de raison $q = 0,6$

b) (u_n) est géométrique donc $u_n = u_0 \times q^n$ $\quad u_n = -0,15 \times 0,6^n$

D'où $p_n = u_n + 0,75$ $\quad \underline{p_n = -0,15 \times 0,6^n + 0,75 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

c) Pour $n = 9$, on a $p = -0,15 \times 0,6^9 + 0,75$

$$p \simeq 0,75$$

La probabilité pour que l'athlète réussisse à franchir la barre à la 10^e séance est égale à <u>0,75 environ</u>.