23TDS3

Exercice 1

• Question 1 $u_n = e^{2n+1}$ donc $u_{n+1} = e^{2(n+1)+1}$

$u_{n+1} = e^{2n+3}$

$u_{n+1} = e^2 \times e^{2n+1}$

$u_{n+1} = e^2 \times u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc la suite (u_n) est géométrique | de premier terme $u_0 = e^{2\times 0+1} = e$
| de raison $q = e^2$

Réponse C

• Question 2 La condition de maintien dans la boucle while doit être le contraire de ce qu'on veut en sortie de boucle.
On veut en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n < 10000$. Donc la condition doit être u <= 10000

Réponse A

• Question 3 $\begin{cases} u_0 = 15 \\ u_{n+1} = 1{,}2u_n + 12 \end{cases}$

$V_n = u_n + 60$ donc on a $V_{n+1} = u_{n+1} + 60$

$V_{n+1} = 1{,}2\, u_n + 12 + 60$

Mais puisque $u_n = V_n - 60$ alors $V_{n+1} = 1{,}2\,(V_n - 60) + 72$

$V_{n+1} = 1{,}2\, V_n - 72 + 72$

$V_{n+1} = 1{,}2\, V_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison 1,2 Réponse B

• Question 4 Pour connaître le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -0{,}73$ on étudie le sens de variation de f.
On calcule la dérivée $f'(x)$.

$f(x) = 2x \times e^x$ on a $u(x) = 2x$ $u'(x) = 2$
$V(x) = e^x$ $V'(x) = e^x$

$f'(x) = (2)(e^x) + (2x)(e^x)$

$f'(x) = (2+2x) \times e^x$

$2 + 2x > 0$

$2x > -2$

$x > -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de $2+2x$		$-$	0	$+$	
signe de e^x		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	0	$\searrow$	$\approx -0{,}736$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1) = 2(-1)e^{-1}$

$f(-1) = -\frac{2}{e} \approx -0{,}736$

. Limite en $-\infty$: D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

. Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Donc d'après le tableau de variation et le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ a 2 solutions

Réponse C

• Question 5 $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ donc par quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+1}{e^x} = -\infty$ Réponse A

Exercice 2

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3 \end{cases}$

1) a) $u_1 = 5u_0 - 4(0) - 3$ $\quad$ $\underline{u_1 = 12}$

b)

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR △Tbl

n	u			
0	3			
1	12			
2	53			
3	254			
4	1255			
5	6256			
6	31257			
7	156258			
8	781259			
9	3.91E6			
10	1.95E7			

le calcul des premiers termes de la suite (u_n) permet de conjecturer :
- la suite est monotone croissante
- la suite a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

2) a) La propriété à démontrer est $\underline{u_n \geq n+1}$
- Initialisation
  $u_0 = 3$ et $n+1 = 0+1$ donc $u_0 \geq 0+1$
  la propriété est vraie pour le premier rang $n=0$
- Hérédité.
  Soit k un certain entier naturel.
  On fait l'hypothèse que $u_k \geq k+1$

  On construit u_{k+1} :
  $$5u_k \geq 5k+5$$
  $$5u_k - 4k - 3 \geq 5k+5-4k-3$$
  $$5u_k - 4k - 3 \geq k+2$$
  $$u_{k+1} \geq k+2$$
  C'est la proposition vraie au rang $k+1$
  la propriété est héréditaire.
- Conclusion : la propriété est vraie pour le rang $n=0$
  la propriété est héréditaire.
  Donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) On sait que $\lim_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$

et comme $u_n \geq n+1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ alors $\underline{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$
(théorème de comparaison)

3) a) $u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$

$V_n = u_n - n - 1$ donc $V_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) - 1$

$V_{n+1} = u_{n+1} - n - 1 - 1$

$V_{n+1} = u_{n+1} - n - 2$

Exprimons V_{n+1} en fonction de V_n

$V_{n+1} = 5u_n - 4n - 3 - n - 2$

$V_{n+1} = 5u_n - 5n - 5$

$V_{n+1} = 5(u_n - n - 1)$

$V_{n+1} = 5V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc la suite (V_n) est géométrique | de 1^er terme $V_0 = u_0 - 0 - 1 = 3 - 1 = \underline{2}$
| de raison $q = 5$

b) Puisque (V_n) est géométrique de premier terme V_0, on a $V_n = V_0 \times q^n$

$\underline{V_n = 2 \times 5^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Puisque $V_n = u_n - n - 1$ alors $u_n = V_n + n + 1$

$\underline{u_n = 2 \times 5^n + n + 1}$

4) a) $u_{n+1} - u_n = 5u_n - 4n - 3 - u_n$

$u_{n+1} - u_n = 4u_n - 4n - 3$

Or $u_n = 2 \times 5^n + n + 1$ donc $u_{n+1} - u_n = 4(2 \times 5^n + n + 1) - 4n - 3$

$u_{n+1} - u_n = 8 \times 5^n + 4n + 4 - 4n - 3$

$\underline{u_{n+1} - u_n = 8 \times 5^n + 1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) le signe de $u_{n+1} - u_n$ donne le sens de variation de (u_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $8 \times 5^n > 0$ donc $8 \times 5^n + 1 > 0$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$

$u_{n+1} > u_n$

Donc la suite (u_n) est <u>monotone croissante</u>.

5) a)

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while u<10**7 :
        u = 5*u-4*n-3
   ou   u = 2*5**n+n+1
        n = n + 1
    return n
```

b) La valeur de n renvoyée est le premier rang pour lequel u_n est supérieur ou égal à 10^7.

D'après la table de la calculatrice trouvée à la question 1) b n vaut <u>10</u>.

Exercice 3

1) On cherche à démontrer que la limite de $f(x)$ est finie quand x tend vers $+\infty$.

$f(x) = \frac{x}{e^x}$

D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Donc par inverse $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Donc $\mathcal{C}_f$ a une asymptote en $+\infty$ d'équation $\underline{y=0}$.

2) a) $f(x) = x\,e^{-x}$

$f'(x) = (1) \times e^{-x} + (x) \times (-e^{-x})$

$\underline{f'(x) = e^{-x}(1-x)}$

b) $1 - x > 0$

$1 > x$

x	0 α 1 β $+\infty$
signe de e^{-x}	$+$ | $+$
signe de $1-x$	$+$ 0 $-$
signe de $f'(x)$	$+$ | $-$
variations de f	$0 \nearrow$ (0,367) $\nearrow \frac{1}{e} \approx 0{,}368 \searrow$ (0,367) $\searrow 0$

$f(0) = 0\,e^{-0} = 0$

$f(1) = 1\,e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}368$

3) Sur $[0;1]$ $\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue} \\ f \text{ est strictement croissante} \\ 0{,}367 \in [f(0); f(1)] \end{array}\right\}$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones $f(x) = 0{,}367$ a une unique solution $\alpha \in [0;1]$

Sur $[1;+\infty[$ $\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue} \\ f \text{ est strictement décroissante} \\ 0{,}367 \in]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) ; f(1)] \end{array}\right\}$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones $f(x) = 0{,}367$ a une unique solution $\beta \in [1;+\infty[$

• <u>Conclusion</u>: $f(x) = 0{,}367$ a <u>deux</u> solutions (α et β)

4) On dresse le tableau de signes de f'' et on en déduit la convexité de f

x	0		2		$+\infty$
signe de e^{-x}		$+$	|	$+$	
signe de $x-2$		$-$	0	$+$	
signe de f''		$-$	0	$+$	
convexité de f		concave		convexe	

5) a) L'équation réduite de la tangente est $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ où a est l'abscisse du point A de contact entre la tangente T_a et la courbe $\mathcal{C}_f$ d'équation $y = f(x)$.

$f(x) = x e^{-x}$ donc $f(a) = a e^{-a}$

$f'(x) = e^{-x}(1-x)$ donc $f'(a) = e^{-a}(1-a)$

Donc T_a a pour équation $y = a e^{-a} + e^{-a}(1-a)(x-a)$

On développe :
$$y = a e^{-a} + e^{-a}(1-a)x + e^{-a}(1-a)(-a)$$
$$y = a e^{-a} + e^{-a}(1-a)x - a e^{-a}(1-a)$$
$$y = a e^{-a} + e^{-a}(1-a)x - a e^{-a} + a^2 e^{-a}$$
$$y = [(1-a)e^{-a}]x + a^2 e^{-a}$$

b) L'ordonnée $g(a)$ du point H_a est l'ordonnée à l'origine de la tangente T_a c'est à dire $a^2 e^{-a}$

Donc $g(a) = a^2 e^{-a}$

c) Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 e^{-x}$ pour $x \in [0; +\infty[$
Etudions le sens de variation de la fonction g.

g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $g'(x) = 2x e^{-x} + x^2(-e^{-x})$
$$g'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$$
$$g'(x) = e^{-x}(2-x)x$$

Dressons le tableau de variation de g.

x	0		2		$+\infty$
signe de e^{-x}		$+$		$+$	
signe de $2-x$		$+$	0	$-$	
signe de x	0	$+$		$+$	
signe de $g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
variations de g		$\nearrow$		$\searrow$	

g atteint son maximum pour $x = 2$, ce qui correspond à l'abscisse du point où la fonction f change de convexité d'après la question 4.
Il s'agit donc bien de la valeur de a pour que A soit un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 4

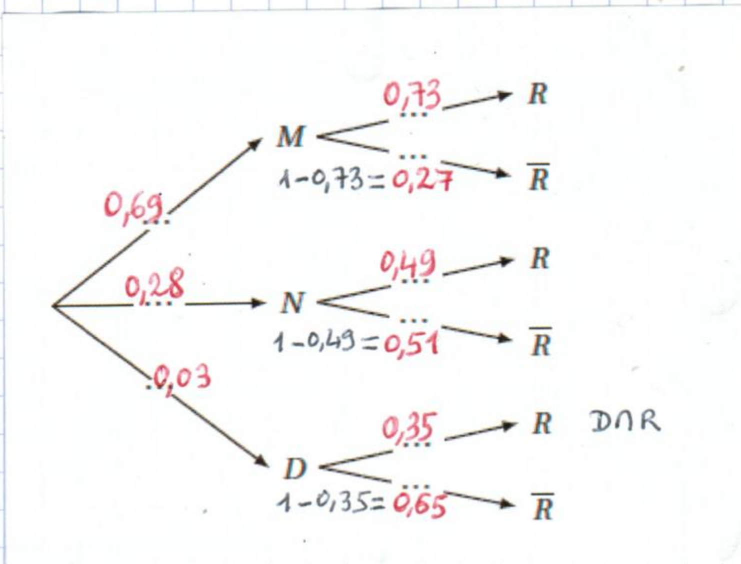
Partie A

Avec les notations M, N, D, R de l'énoncé :

- 69% des déchets sont minéraux et non dangereux donc $P(M) = 0,69$
- 28% des déchets sont non minéraux et non dangereux donc $P(N) = 0,28$
- les déchets restants sont dangereux donc $P(D) = 1 - (0,69 + 0,28) = 0,03$

- 73% des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables donc $P_M(R) = 0,73$
- 49% des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables donc $P_N(R) = 0,49$
- 35% des déchets dangereux sont recyclables donc $P_D(R) = 0,35$

1) Ceci permet de compléter l'arbre :



2) L'évènement "le déchet est dangereux et recyclable" est $D \cap R$

$P(D\cap R) = P(D) \times P_D(R)$

$P(D\cap R) = 0,03 \times 0,35 = \underline{0,0105}$

3) $M \cap \overline{R}$ est l'évènement "le déchet est minéral non dangereux et non recyclable".

$P(M\cap \overline{R}) = P(M) \times P_M(\overline{R})$

$P(M\cap \overline{R}) = 0,69 \times 0,27 = \underline{0,1863}$

4) M, N et D forment une partition de l'univers

D'après la formule des probabilités totales :

$P(R) = P(M\cap R) + P(N\cap R) + P(D\cap R)$

$P(R) = P(M) \times P_M(R) + P(N) \times P_N(R) + P(D) \times P_D(R)$

$P(R) = 0,69 \times 0,73 + 0,28 \times 0,49 + 0,03 \times 0,35$

$\underline{P(R) = 0,6514}$

5) Le déchet est recyclable donc on a la condition "sachant R".

On cherche $P_R(N)$

$$P_R(N) = \frac{P(R\cap N)}{P(R)}$$

$$P_R(N) = \frac{P(N) \times P_N(R)}{P(R)}$$

$$P_R(N) = \frac{0,28 \times 0,49}{0,6514}$$

$\underline{P_R(N) = 0,2106}$

Partie B

1) a) le tirage est avec remise (du moins il est assimilé à un tirage avec remise). Donc les tirages sont des epreuves : • independantes
• à deux issues
• identiques.

Donc X qui donne le nombre de "succès" (le déchet est recyclable) parmi $n = 20$ tirages suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $p = 0,6514$
$n = 20$

b) On cherche $P(X=14)$
$P(X=14) = \binom{20}{14} \times (0,6514)^{14} \times (1-0,6514)^{6} = \underline{0,1723}$

c) On cherche $P(X \geqslant 10)$
A la calculatrice, on calcule $P(X \geqslant 10) = 1 - P(X \leqslant 9)$
$P(X \geqslant 10) = \underline{0,9483}$

d) L'évènement $X \geqslant 5$ est $\{5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15;\dots 20\}$
L'évènement $X \leqslant 10$ est $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$
L'évènement $(X \geqslant 5) \cap (X \leqslant 10)$ est $\{5;6;7;8;9;10\}$

On a $P_{X \geqslant 5}(X \leqslant 10) = \dfrac{P((X \geqslant 5) \cap (X \leqslant 10))}{P(X \geqslant 5)}$

$P_{X \geqslant 5}(X \leqslant 10) = \dfrac{P(5 \leqslant X \leqslant 10)}{P(X \geqslant 5)}$

$P_{X \geqslant 5}(X \leqslant 10) = \dfrac{P(X \leqslant 10) - P(X \leqslant 4)}{1 - P(X \leqslant 4)}$

$P_{X \geqslant 5}(X \leqslant 10) = \underline{0,1190}$

Interpretation :
C'est la probabilité d'avoir moins de 11 déchets recyclables sachant qu'on en a obtenu plus de 4 recyclables

2) a) $P_n = P(X=0)$
$P_n = \binom{n}{0} \times 0,6514^{0} \times (1-0,6514)^{n} = 1 \times 1 \times (0,3486)^{n} = \underline{0,3486^{n}}$

b) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0)$
$\underline{P(X \geqslant 1) = 1 - 0,3486^{n}}$ est la probabilite que sur n déchets prélevés, au moins un soit recyclable.

A la calculatrice, on fait le calcul pour différentes valeurs de n.
On trouve pour $n = 6$ $P(X \geqslant 1) = 0,9982$
et pour $n = 7$ $P(X \geqslant 1) = 0,9994$

Donc, à partir de $\underline{n=7}$ la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,999.