Exercice 1

1) Il y a 26 possibilités pour la 1ère lettre
25 possibilités pour la 2e lettre (puisque les tirages sont sans remise)
24 possibilités pour la 3e lettre
23 4e
22 5e
21 6e

Donc le nombre de mots est $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21$ Réponse C

2) Pour les numéros normaux, il y a $\binom{49}{5}$ possibilités, chaque possibilité étant une partie à 5 éléments parmi les 49 de la grille.
Pour chacune de ces possibilités, il y a 10 possibilités pour le numéro "chance".
Donc il y a $\binom{49}{5} \times 10 = 1\,906\,884 \times 10 = 19\,068\,840$ grilles simples

Réponse A

3) L'immeuble possède $3 \times 10 = 30$ fenêtres.
Pour chaque fenêtre, il y a deux possibilités donc le nombre de possibilités au total est 2^{30} Réponse C

4) les machines sont identiques avec chacune la probabilité $p = 0{,}082$ d'être défectueuse.
La probabilité $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$
On calcule $P(X \leq 2)$ à la calculatrice:

binomFRep(50, 0.082, 2) = 0,2114
$1 - 0{,}2114 = 0{,}789$ arrondi à 10^{-3} près Réponse B

5) X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,0{,}082)$. Toutes les machines fonctionnent signifie que 0 sont défectueuses

$P(X=0) = \binom{n}{0} p^0 \times q^n$

$P(X=0) = 1 \times 0{,}082^0 \times (1-0{,}082)^n$

$P(X=0) = 0{,}918^n$

On résout $P(X=0) > 0{,}4$

$0{,}918^n > 0{,}4$

$\ln(0{,}918)^n > \ln(0{,}4)$

$n \times \ln(0{,}918) > \ln(0{,}4)$

$n < \dfrac{\ln(0{,}4)}{\ln(0{,}918)}$ car $\ln(0{,}918) < 0$

$n < 10{,}71$

Comme n est un entier, sa plus grande valeur est $n = 10$

Réponse C

Exercice 2

Partie A

1) Le café étant au départ à 80°C, on peut conjecturer que sa température baisse pour rejoindre la température ambiante $M = 10°C$.
Donc la suite (T_n) est décroissante.

2) On a $T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$

$T_{n+1} - T_n = -0,2\, T_n + 2$

$T_{n+1} = 0,8\, T_n + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) a) $u_n = T_n - 10$ donc $u_{n+1} = T_{n+1} - 10$

Or $T_{n+1} = 0,8 T_n + 2$ donc $u_{n+1} = 0,8\, T_n + 2 - 10$

$u_{n+1} = 0,8\, T_n - 8$

Or $T_n = u_n + 10$ donc $u_{n+1} = 0,8(u_n + 10) - 8$

$u_{n+1} = 0,8\, u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc (u_n) est géométrique | de 1er terme $u_0 = T_0 - 10$ $\quad u_0 = 80 - 10$ $\quad u_0 = 70$
| de raison $q = 0,8$

b) Puisque (u_n) est géométrique alors $u_n = u_0 \times q^n$

$u_n = 70 \times 0,8^n$

et puisque $T_n = u_n + 10$ alors $T_n = 70 \times 0,8^n + 10 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) $-1 < 0,8 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$. Par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = 10$

4) a) La sortie de la boucle Tant que a lieu quand $T \geqslant 40$ devient faux pour la première fois.
En calculant les premiers termes de la suite (T_n) à la calculatrice, on obtient :

n	T_n
0	80
1	66
2	54,8
3	45,84
4	38,67

Donc la variable n contient 4 à la fin de l'exécution de l'algorithme.

b) Dans le contexte de l'exercice, le café a atteint une température inférieure à 40°C après 4 minutes.

Partie B

1) a) la fonction θ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et la fonction $t \mapsto e^{-0,2t}$ aussi.
Et comme $e^{-0,2t} \neq 0$ sur $]0;+\infty[$ alors le quotient des deux fonctions est aussi dérivable sur $]0;+\infty[$. On pose $f(t) = \frac{\theta(t)}{e^{-0,2t}\, v(t)}$ avec $v'(t) = -0,2e^{-0,2t}$

$$f'(t) = \frac{\theta'(t) \times e^{-0,2t} - \theta(t) \times -0,2e^{-0,2t}}{(e^{-0,2t})^2}$$

$$f'(t) = \frac{-0,2 \times \theta(t) \times e^{-0,2t} + \theta(t) \times 0,2e^{-0,2t}}{(e^{-0,4t})}$$

$$f'(t) = 0$$

b) $f(0) = \frac{\theta(0)}{e^0}$ $\quad f(0) = \theta(0)$ donc $f(0) = 80$

Puisque $f'(t) = 0$ alors f est constante et vaut donc la valeur qu'elle a en $t = 0$ c'est à dire 80.
$f(t) = 80$ pour tout $t \in]0;+\infty[$

Et comme $f(t) = \frac{\theta(t)}{e^{-0,2t}}$ donc $\theta(t) = f(t) \times e^{-0,2t}$
$\underline{\theta(t) = 80 \times e^{-0,2t}}$

c) On remplace dans $\theta'(t) = -0,2 \times \theta(t)$
$\theta(t)$ par $80 \times e^{-0,2t}$
On obtient $\theta'(t) = -0,2 \times 80 \times e^{-0,2t}$
$\theta'(t) = -16e^{-0,2t}$

D'autre part :
si on dérive $\theta(t) = 80 \times e^{-0,2t}$ on obtient $\theta'(t) = 80 \times -0,2e^{-0,2t}$
$\theta'(t) = -16e^{-0,2t}$

Conclusion : la fonction définie par $\theta(t) = 80e^{-0,2t}$ est bien solution de l'équation $\underline{\theta'(t) = -0,2 \times \theta(t)}$

2) a) La température du café vérifie l'équation $\theta'(t) = -0,2(\theta - M)$ avec $M = 10$.
Donc g vérifie $g'(t) = -0,2\,(g(t) - 10)$
Donc g est solution de $y' = -0,2\,(y - 10)$
$\underline{y' = -0,2y + 2}$

b) C'est une équation différentielle du type $y' = ay + b$ avec les constantes $\begin{cases} a = -0,2 \\ b = 2 \end{cases}$

Donc $g(t) = Ke^{at} - \frac{b}{a}$ $\quad g(t) = Ke^{-0,2t} - \frac{2}{-0,2}$
$g(t) = Ke^{-0,2t} + 10$

On sait que $g(0) = 80$ donc $80 = Ke^0 + 10$ d'où $K = 80 - 10 = 70$

Conclusion $\underline{g(t) = 70e^{-0,2t} + 10 \text{ pour tout } t \in]0;+\infty[}$

3) On cherche t pour que $70e^{-0,2t} + 10 = 40$
$70e^{-0,2t} = 30$
$e^{-0,2t} = \frac{3}{7}$ $\quad -0,2t = \ln\left(\frac{3}{7}\right)$ $\quad t = -5\ln\left(\frac{3}{7}\right)$
$t = 4,236$ min

$t = 4,236 \times 60$ s $\quad t = 254,2$ s $\quad t_0 = 255$ secondes

Exercice 3

1) a) C appartient à la sphère si et seulement si $KC = 13$

On calcule la distance KC :

$$\vec{KC}\begin{pmatrix} x_C - x_K \\ y_C - y_K \\ z_C - z_K \end{pmatrix} \quad \vec{KC}\begin{pmatrix} 4 - 0 \\ -8 - 4 \\ 0 - 3 \end{pmatrix} \quad \vec{KC}\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{KC}\| = \sqrt{(4)^2 + (-12)^2 + (-3)^2} \qquad \|\vec{KC}\| = \sqrt{169} = \underline{13}$$

b) On montre que les vecteurs $\vec{CA}$ et $\vec{CB}$ sont orthogonaux en montrant que leur produit scalaire est nul.

$$\vec{CA}\begin{pmatrix} 0 - 4 \\ 4 - (-8) \\ 16 - 0 \end{pmatrix} \quad \vec{CA}\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CB}\begin{pmatrix} 0 - 4 \\ 4 - (-8) \\ -10 - 0 \end{pmatrix} \quad \vec{CB}\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$\vec{CA}.\vec{CB} = (-4)(-4) + (12)(12) + (16)(-10)$

$\underline{\vec{CA}.\vec{CB} = 0}$

2) a) Il faut montrer que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

$\vec{CA}$ et $\vec{CB}$ ne sont pas colinéaires (puisqu'ils sont orthogonaux)

Donc ils forment un système de vecteurs directeurs du plan (ABC)

$\vec{n}.\vec{CA} = (3)(-4) + (1)(12) + (0)(16) = 0$

$\vec{n}.\vec{CB} = (3)(-4) + (1)(12) + (0)(-10) = 0$

b) Puisque $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal à (ABC) alors (ABC) a une équation du type $3x + y + 0z + d = 0$

On calcule d en remplaçant x, y, z par les coordonnées d'un point de (ABC). Par exemple A :

$3(0) + (4) + 0(16) + d = 0$

$4 + d = 0$

$d = -4$ donc $\underline{3x + y - 4 = 0}$

3) a) $D(12; 0; 0)$ a une abscisse $x = 12$, une ordonnée nulle et une cote nulle donc c'est bien un point de l'axe (Ox).

. On calcule la distance DK : $\vec{DK}\begin{pmatrix} 0 - 12 \\ 4 - 0 \\ 3 - 0 \end{pmatrix} \quad \vec{DK}\begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\|\vec{DK}\| = \sqrt{(-12)^2 + (4)^2 + (3)^2}$

$\|\vec{DK}\| = \sqrt{169} = 13$. Donc $\underline{D}$ est sur la sphère

b) La droite Δ a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan (ABC) c'est à dire $\vec{n}$.

Δ passe par D donc $\begin{cases} x = x_D + k(3) \\ y = y_D + k(1) \\ z = z_D + k(0) \end{cases} \quad \begin{cases} x = 12 + 3k \\ y = k \\ z = 0 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

c) La distance de D au plan (ABC) est DH en appelant H le projeté orthogonal de D sur (ABC).

D'après le cours $DH = \dfrac{|\vec{DA}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ où A est un point du plan de projection

4

$\vec{DA}\begin{pmatrix}0-12\\4-0\\16-0\end{pmatrix}$ $\vec{DA}\begin{pmatrix}-12\\4\\16\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\vec{DA}.\vec{n}=(-12)(3)+(4)(1)+(16)(0)$

$\vec{DA}.\vec{n}=-36+4+0$

$\vec{DA}.\vec{n}=-32$

$|\vec{DA}.\vec{n}|=32$

$||\vec{n}||=\sqrt{(3)^2+(1)^2+(0)^2}$

$||\vec{n}||=\sqrt{10}$ D'où $DH=\dfrac{32}{\sqrt{10}}$ $DH=\dfrac{32\sqrt{10}}{10}=\sqrt{102,4}$

$DH\approx 10,119$

4) la hauteur du tétraèdre est $DH=3,2\sqrt{10}$

L'aire de base est l'aire du triangle ABC rectangle en C.

$\mathcal{B}=\frac{1}{2}\cancel{\times}CA\times CB$

$\vec{CA}\begin{pmatrix}-4\\12\\16\end{pmatrix}$ $||\vec{CA}||=\sqrt{(-4)^2+(12)^2+16^2}$ $CA=\sqrt{416}$

$\vec{CB}\begin{pmatrix}-4\\12\\-10\end{pmatrix}$ $||\vec{CB}||=\sqrt{(-4)^2+(12)^2+(-10)^2}$ $CB=\sqrt{260}$

Donc $\mathcal{B}=\frac{1}{2}\times\sqrt{416}\times\sqrt{260}$

$\mathcal{B}=\frac{1}{2}\times\sqrt{416\times260}$

$\mathcal{B}=\frac{1}{2}\sqrt{108160}=\sqrt{27040}\approx 164,438$

D'où le volume du tétraèdre:

$V=\frac{1}{3}\times\mathcal{B}\times DH$

$V=\frac{1}{3}\times\sqrt{27040}\times\frac{32\sqrt{10}}{10}$

$V=\frac{1}{30}\times32\times\sqrt{270400}$

$V=\frac{32}{30}\times520$

$V=\frac{16640}{30}$ $V=\frac{1664}{3}$

Exercice 4

1) a) le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ est $f'(1)$.
Sur le graphique on lit l'ordonnée du point de $\mathcal{C}'$ qui a pour abscisse 1.
On lit $f'(1) = 2$

b) Une fonction f est convexe lorsque sa dérivée est croissante.
On regarde la courbe C' et on voit que la dérivée f' est croissante sur $[7,3\ ;+\infty[$

2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-\ln(x)) = -\infty$
et par produit $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty} (2-\ln(x)) \times \ln(x) = -\infty}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$
par somme $\lim\limits_{x\to 0} (2-\ln(x)) = +\infty$
et par produit
et par produit $\underline{\lim\limits_{x\to 0} (2-\ln(x) \times \ln(x) = -\infty}$

Graphiquement la courbe $\mathcal{C}$ a une asymptote verticale d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées)

3) les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses ont une abscisse x solution de l'équation $f(x) = 0$
Or $f(x) = (2-\ln x) \times \ln x$
On résout donc l'équation $(2-\ln x) \times \ln(x) = 0$
$2-\ln x = 0$ ou $\ln(x) = 0$
$\ln x = 2$ ou $\ln x = 0$
$x = e^2$ ou $x = e^0$
le premier point a pour coordonnées $(e^2\ ; 0)$
le deuxième point a pour coordonnées $(1\ ; 0)$

4) a) $f(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = 2-\ln x$ $\quad u'(x) = -\frac{1}{x}$
$v(x) = \ln x$ $\quad v'(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = -\frac{1}{x} \times \ln x + (2-\ln x) \times \frac{1}{x}$
$f'(x) = \dfrac{-\ln x + 2 - \ln x}{x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{2-2\ln x}{x}$ $\quad \underline{f'(x) = \dfrac{2(1-\ln x)}{x}}$

b) Signe de $1-\ln x$: $\quad 1-\ln x > 0 \quad 1 > \ln x \quad e^1 > x \quad x < e$
Donc le tableau de variation de f est :

x	0		e		$+\infty$
signe de 2		+		+	
signe de $1-\ln x$		+	0	−	
signe de x		+		+	
signe de f'		+	0	−	
variations de f		$-\infty \nearrow$	1	$\searrow -\infty$	

$f(x) = (2-\ln x) \ln x$
$f(e) = (2-\ln e) \ln e$
$f(e) = (2-1) \times 1$
$f(e) = 1$

5) • La fonction f est convexe lorsque $f''(x) \geq 0$

On étudie le signe de $f''(x) = \dfrac{2(\ln x - 2)}{x^2}$

Signe de $\ln x - 2$:

$\ln x - 2 > 0$

$\ln x > 2$

$x > e^2$ $\quad (e^2 \simeq 7,39)$

x	0		e^2		$+\infty$
signe de 2	‖	$+$		$+$	
signe de $\ln x - 2$	‖	$-$	0	$+$	
signe de x^2	‖	$+$		$+$	
signe de f''	‖	$-$	0	$+$	

• Le plus grand intervalle sur lequel f est convexe est donc $[e^2; +\infty[$

• Au point d'inflexion la dérivée s'annule en changeant de signe.
C'est donc le point de coordonnées $(e^2; f(e^2))$

$f(e^2) = (2 - \ln(e^2)) \times \ln(e^2)$

$f(e^2) = (2 - 2\ln(e)) \times 2\ln(e)$

$f(e^2) = (2-2) \times 2$

$f(e^2) = 0$

Donc le point d'inflexion a pour coordonnées $(e^2; 0)$