CHAPITRE 3 : Loi binomiale

[1 Succession d'épreuves indépendantes 2](#_Toc55673369)

[1.1 Univers d'une succession d'épreuves 2](#_Toc55673370)

[1.2 Calcul de probabilités 3](#_Toc55673371)

[2 Schéma de Bernoulli et loi binomiale 4](#_Toc55673372)

[2.1 Epreuve et schéma de Bernoulli 4](#_Toc55673373)

[2.2 Loi binomiale 6](#_Toc55673374)

[2.3 Espérance et variance de la loi binomiale 8](#_Toc55673375)

CHAPITRE 3 : Loi binomiale

# Succession d'épreuves indépendantes

## Univers d'une succession d'épreuves

***Définition***

On peut représenter une succession de $n$ épreuves indépendantes $E\_{1}, E\_{2}, E\_{3}, …, E\_{n}$ par **un arbre pondéré** à $n$ niveaux.

On considère $n$ épreuves indépendantes ayant pour univers respectifs $Ω\_{1}, Ω\_{2}, Ω\_{3}, …, Ω\_{n}$.

La succession de ces $n$ épreuves indépendantes constitue une épreuve dont les issues sont les éléments du **produit cartésien** $Ω\_{1}×Ω\_{2}×Ω\_{3}×… ×Ω\_{n}$**.**

***Exemple***

1. Première épreuve $E\_{1}$ : lancer d’une pièce.

L’univers $Ω\_{1}=\left\{Pile ;Face\right\}$.

1. Deuxième épreuve $E\_{2}$ : on tire une carte parmi huit cartes.

L’univers $Ω\_{2}=\left\{7 ;8 ;9 ;10 ;valet ;dame ;roi ;as\right\}$.

La succession de ces $2$ épreuves indépendantes constitue une épreuve dont les issues sont les éléments de$Ω\_{1}×Ω\_{2}=\left\{\left(Pile ;7\right);\left(Pile ;8\right); \left(Pile ;9\right);…; \left(Face ;Roi\right); (Face ;as)\right\}$



## Calcul de probabilités

***Propriété (admise)***

Lors d’une succession de $n$ épreuves indépendantes, la probabilité d’une issue est égale au produit des probabilités de chacune des issues du n-uplet.

***Exemple 1***

Reprenons l’exemple précédent. Si on suppose que la pièce est bien équilibrée et que le tirage de la carte est au hasard, alors la probabilité de l’issue $\left(Pile ;7\right)$ est égale à :

$$P\left(\left(P;7\right)\right)=\frac{1}{2}×\frac{1}{8}$$

$$P\left(\left(P;7\right)\right)=\frac{1}{16}$$

***Exemple 2***

Toujours avec l’exemple précédent, la probabilité d’obtenir un as est égale à :

$$P\left(as\right)=P\left(\left(P;as\right)\right)+p\left(\left(F;as\right)\right)$$

$$P\left(as\right)=\frac{1}{2}×\frac{1}{8}+\frac{1}{2}×\frac{1}{8}$$

$$P\left(as\right)=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}$$

$$P\left(as\right)=\frac{1}{8}$$



$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

as

# Schéma de Bernoulli et loi binomiale

## Epreuve et schéma de Bernoulli

***Définition***

**Epreuve de Bernoulli** (lire « Bernouilli »)

On appelle épreuve de Bernoulli[[1]](#footnote-1) toute expérience aléatoire n’ayant que deux issues. Une issue est considérée somme un « succès » et l’autre issue comme un « échec ».

Si $p$ est la probabilité du succès alors $q=1-p$ est la probabilité de l’échec.

***Exemple :***

Une urne contient 10 boules : 6 noires et 4 boules blanches. On prélève au hasard une boule de l’urne. On considère comme :

* « succès » $S$ : la boule est blanche avec la probabilité $p=0,4$
* « échec » $\overbar{S}$ : la boule est noire avec la probabilité $q=0,6$

On peut représenter une épreuve de Bernoulli par un arbre :



Sa loi de probabilité est très simple :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$x\_{i}$$ | $$S$$ | $$\overbar{S}$$ | TOTAL |
| $$P(X=x\_{i})$$ | $$0,4$$ | $$0,6$$ | $$1$$ |

La plupart du temps, on ne considère pas une seule épreuve de Bernoulli.

On considère une succession d’épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

***Exemple :***

Une urne contient 10 boules : 6 noires et 4 boules blanches. On prélève au hasard successivement, **avec remise**, 4 boules de l’urne. $X$ désigne le nombre de boules blanches obtenues. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ ?

*Réponse :*

Un tirage de 4 boules consiste en 4 épreuves, identiques et indépendantes (car les prélèvements sont avec remise). Chaque épreuve a deux issues possibles :

* « succès » $S$ : la boule est blanche avec la probabilité $p=0,4$
* « échec » $\overbar{S}$ : la boule est noire avec la probabilité $q=0,6$
* On peut représenter un schéma de Bernoulli par un arbre :

|  |  |
| --- | --- |
|  | Résultat |
| $$SSSS$$ |
| $$SSS\overbar{S}$$ |
| $$SS\overbar{S}S$$ |
| $$SS\overbar{S}\overbar{S}$$ |
| $$S\overbar{S}SS$$ |
| $$S\overbar{S}S\overbar{S}$$ |
| $$S\overbar{S}\overbar{S}S$$ |
| $$S\overbar{S}\overbar{S}\overbar{S}$$ |
| $$\overbar{S}SSS$$ |
| $$\overbar{S}SS\overbar{S}$$ |
| $$\overbar{S}S\overbar{S}S$$ |
| $$\overbar{S}S\overbar{S}\overbar{S}$$ |
| $$\overbar{S}\overbar{S}SS$$ |
| $$\overbar{S}\overbar{S}S\overbar{S}$$ |
| $$\overbar{S}\overbar{S}\overbar{S}S$$ |
| $$\overbar{S}\overbar{S}\overbar{S}\overbar{S}$$ |
| La loi de probabilité de $X$ est résumée dans le tableau suivant : |  |
| $$x\_{i}$$ | $$0$$ | $$1$$ | $$2$$ | $$3$$ | $$4$$ |
| $$P(X=x\_{i})$$ | $$1×0,4^{0}×0,6^{4}$$ | $$4×0,4^{1}×0,6^{3}$$ | $$6×0,4^{2}×0,6^{2}$$ | $$4×0,4^{3}×0,6^{1}$$ | $$1×0,4^{4}×0,6^{0}$$ |

***Propriété***

On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre $p$, où $p$ est un réel compris entre $0$ et $1$.

Soit $n$ un entier naturel non nul. On définit **un schéma de Bernoulli de paramètres** $n$ **et** $p$ lorsqu’on répète $n$ fois de façon indépendante cette épreuve de Bernoulli.

L’arbre ci-dessus représente un schéma de Bernoulli de paramètres $n=4$ et $p=0,4$.

## Loi binomiale

***Définition***

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres $n$ et $p$. Soit $X$ la variable aléatoire **comptant le nombre de succès** obtenus parmi $n$ épreuves.

La loi de probabilité de $X$ s’appelle la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

On note $B(n ;p)$ la loi binomiale.

***Remarque :***

Le nombre de succès parmi $n$ épreuves peut aller de $0$ à $n$. Complétons l’exemple précédent :

La variable aléatoire $X$ « nombre de succès » suit la loi $B(n , p)$ de paramètres $n=4$ et $p=0,4$.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Résultat | $$X$$ | Probabilité |
| $$SSSS$$ | $$4$$ | $$0,4^{4}×0,6^{0}$$ |
| $$SSS\overbar{S}$$ | $$3$$ | $$0,4^{3}×0,6^{1}$$ |
| $$SS\overbar{S}S$$ | $$3$$ | $$0,4^{3}×0,6^{1}$$ |
| $$SS\overbar{S}\overbar{S}$$ | $$2$$ | $$0,4^{2}×0,6^{2}$$ |
| $$S\overbar{S}SS$$ | $$3$$ | $$0,4^{3}×0,6^{1}$$ |
| $$S\overbar{S}S\overbar{S}$$ | $$2$$ | $$0,4^{2}×0,6^{2}$$ |
| $$S\overbar{S}\overbar{S}S$$ | $$2$$ | $$0,4^{2}×0,6^{2}$$ |
| $$S\overbar{S}\overbar{S}\overbar{S}$$ | $$1$$ | $$0,4^{1}×0,6^{3}$$ |
| $$\overbar{S}SSS$$ | $$3$$ | $$0,4^{3}×0,6^{1}$$ |
| $$\overbar{S}SS\overbar{S}$$ | $$2$$ | $$0,4^{2}×0,6^{2}$$ |
| $$\overbar{S}S\overbar{S}S$$ | $$2$$ | $$0,4^{2}×0,6^{2}$$ |
| $$\overbar{S}S\overbar{S}\overbar{S}$$ | $$1$$ | $$0,4^{1}×0,6^{3}$$ |
| $$\overbar{S}\overbar{S}SS$$ | $$2$$ | $$0,4^{2}×0,6^{2}$$ |
| $$\overbar{S}\overbar{S}S\overbar{S}$$ | $$1$$ | $$0,4^{1}×0,6^{3}$$ |
| $$\overbar{S}\overbar{S}\overbar{S}S$$ | $$1$$ | $$0,4^{1}×0,6^{3}$$ |
| $$\overbar{S}\overbar{S}\overbar{S}\overbar{S}$$ | $$0$$ | $$0,4^{0}×0,6^{4}$$ |
| La loi de probabilité de $X$ est résumée dans le tableau suivant : |  |  |  |
| $$x\_{i}$$ | $$0$$ | $$1$$ | $$2$$ | $$3$$ | $$4$$ | TOTAL |
| $$P(X=x\_{i})$$ | $$1×0,4^{0}×0,6^{4}$$ | $$4×0,4^{1}×0,6^{3}$$ | $$6×0,4^{2}×0,6^{2}$$ | $$4×0,4^{3}×0,6^{1}$$ | $$1×0,4^{4}×0,6^{0}$$ | $$1$$ |

Les coefficients **1 4 6 4 1** sont des **coefficients binomiaux**. Ils indiquent le nombre de chemins possibles pour un nombre de succès donné.

On les note : $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{0}\right) \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{1}\right) \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{2}\right) \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{3}\right) \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{4}\right) $ (voir le chapitre 2 combinatoire et dénombrements).

* La loi de probabilité de $X$ a les valeurs numériques suivantes  :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x\_{i}$$ | $$0$$ | $$1$$ | $$2$$ | $$3$$ | $$4$$ | TOTAL |
| $$P(X=x\_{i})$$ | $$0,1296$$ | $$0,3456$$ | $$0,3456$$ | $$0,1536$$ | $$0,0256$$ | $$1$$ |

* La loi de probabilité peut être obtenue dans les listes statistiques de la calculatrice TI :
* Appuyer sur la touche Stats, puis dans le menu EDIT choisir EffListe[[2]](#footnote-2) L1, L2
* Appuyer sur Stats, puis dans le menu EDIT choisir Modifier. Remplir la liste L1 avec 0, 1, 2, 3, 4.
* Sélectionner le titre de la colonne L2, entrée, et saisir la formule $L\_{2}=binomFdp($
	+ nbrEssais :4
	+ p = 0.4
	+ valeur de x : L1

Pour trouver la fonction binomFdp, appuyer sur  et descendre dans le menu DISTRIB.

La représentation graphique de la loi de probabilité de $X$ avec 2nd graph stats :

|  |  |
| --- | --- |
| * Graph 1 Entrée
* Activer l’affichage
* Type : 1er type de graphique
* Liste X : L1
* Liste Y : L2
* Marque : points en forme de croix

Réglage de la fenêtre :* fenêtre
* Xmin = 0
* X max = 4
* X grad = 1
* Ymin = 0
* Y max = 0,4
* Y grad = 0,1
* Xres = 1
 |  |

|  |  |
| --- | --- |
| GeoGebra permet d’obtenir un diagramme en bâtons : |  |

Si $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$, alors pour tout entier $k$ compris entre $0$ et $n$, on a :

$$P\left(X=k\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}\right)p^{k}×q^{n-k}$$

## Espérance et variance de la loi binomiale

L’espérance d’une variable aléatoire $X$ qui suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ est :

$$E\left(X\right)=np$$

Sa variance est :

$$V\left(X\right)=npq$$

Son écart type est :

$$σ=\sqrt{npq}$$

***Exemples :***

|  |
| --- |
| ***Si*** $X$ **suit la loi binomiale** $B\left(100 ;0,50\right)$ **alors :*** Pour tout $k$ entier de $0$ à $100$ :

$$P\left(X=k\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{100}{k}\right)0,5^{k}×0,5^{100-k}$$* En notant $μ$ l’espérance de $X$, on a : $μ=100×0,5=50$
* Variance et écart type : $V\left(X\right)=100×0,5×0,5=25$

$$σ=\sqrt{25}=5$$ |
|  |
|  |
|  |
| **Si** $X$ **suit la loi binomiale** $B\left(100 ;0,85\right)$ **alors :*** Pour tout $k$ entier de $0$ à $100$ :

$$P\left(X=k\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{100}{k}\right)0,85^{k}×0,15^{100-k}$$* En notant $μ$ l’espérance de $X$, on a : $μ=100×0,85=85$
* Variance et l’écart type : $V\left(X\right)=100×0,85×0,15=12,75$

$$σ=\sqrt{12,75}≈3,57$$ |
| *L’écart type est plus petit : les valeurs sont plus concentrées autour de μ.* |

1. Jaques **Bernoulli** : ([1654](https://fr.wikipedia.org/wiki/1654_en_science)-[1705](https://fr.wikipedia.org/wiki/1705_en_science)) est un [mathématicien](https://fr.wikipedia.org/wiki/Math%C3%A9maticien) et [physicien](https://fr.wikipedia.org/wiki/Physicien) [suisse](https://fr.wikipedia.org/wiki/Suisse) (né et mort à [Bâle](https://fr.wikipedia.org/wiki/B%C3%A2le)) [↑](#footnote-ref-1)
2. Pour toute nouvelle utilisation des fonctions statistiques, penser à effacer les listes précédentes. Ainsi l’ancien contenu ne sera pas pris en compte dans les nouveaux calculs. [↑](#footnote-ref-2)