CHAPITRE 3 : Loi binomiale

[1 Succession d'épreuves indépendantes 2](#_Toc55673369)

[1.1 Univers d'une succession d'épreuves 2](#_Toc55673370)

[1.2 Calcul de probabilités 3](#_Toc55673371)

[2 Schéma de Bernoulli et loi binomiale 4](#_Toc55673372)

[2.1 Epreuve et schéma de Bernoulli 4](#_Toc55673373)

[2.2 Loi binomiale 6](#_Toc55673374)

[2.3 Espérance et variance de la loi binomiale 8](#_Toc55673375)

CHAPITRE 3 : Loi binomiale

# Succession d'épreuves indépendantes

## Univers d'une succession d'épreuves

***Définition***

On peut représenter une succession de épreuves indépendantes par **un arbre pondéré** à niveaux.

On considère épreuves indépendantes ayant pour univers respectifs .

La succession de ces épreuves indépendantes constitue une épreuve dont les issues sont les éléments du **produit cartésien .**

***Exemple***

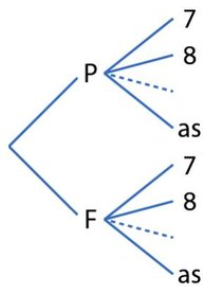
1. Première épreuve  : lancer d’une pièce.

L’univers .

1. Deuxième épreuve  : on tire une carte parmi huit cartes.

L’univers .

La succession de ces épreuves indépendantes constitue une épreuve dont les issues sont les éléments de



## Calcul de probabilités

***Propriété (admise)***

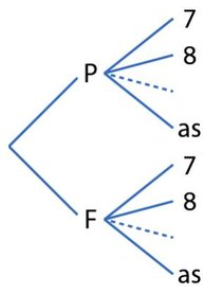
Lors d’une succession de épreuves indépendantes, la probabilité d’une issue est égale au produit des probabilités de chacune des issues du n-uplet.

***Exemple 1***

Reprenons l’exemple précédent. Si on suppose que la pièce est bien équilibrée et que le tirage de la carte est au hasard, alors la probabilité de l’issue est égale à :

***Exemple 2***

Toujours avec l’exemple précédent, la probabilité d’obtenir un as est égale à :



as

# Schéma de Bernoulli et loi binomiale

## Epreuve et schéma de Bernoulli

***Définition***

**Epreuve de Bernoulli** (lire « Bernouilli »)

On appelle épreuve de Bernoulli[[1]](#footnote-1) toute expérience aléatoire n’ayant que deux issues. Une issue est considérée somme un « succès » et l’autre issue comme un « échec ».

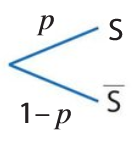
Si est la probabilité du succès alors est la probabilité de l’échec.

***Exemple :***

Une urne contient 10 boules : 6 noires et 4 boules blanches. On prélève au hasard une boule de l’urne. On considère comme :

* « succès »  : la boule est blanche avec la probabilité
* « échec »  : la boule est noire avec la probabilité

On peut représenter une épreuve de Bernoulli par un arbre :



Sa loi de probabilité est très simple :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | TOTAL |
|  |  |  |  |

La plupart du temps, on ne considère pas une seule épreuve de Bernoulli.

On considère une succession d’épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

***Exemple :***

Une urne contient 10 boules : 6 noires et 4 boules blanches. On prélève au hasard successivement, **avec remise**, 4 boules de l’urne. désigne le nombre de boules blanches obtenues. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire  ?

*Réponse :*

Un tirage de 4 boules consiste en 4 épreuves, identiques et indépendantes (car les prélèvements sont avec remise). Chaque épreuve a deux issues possibles :

* « succès »  : la boule est blanche avec la probabilité
* « échec »  : la boule est noire avec la probabilité
* On peut représenter un schéma de Bernoulli par un arbre :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | | | | Résultat | |
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |
| La loi de probabilité de est résumée dans le tableau suivant : | | | | | | |  | |
|  |  |  |  |  |  | |
|  |  |  |  |  |  | |

***Propriété***

On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre , où est un réel compris entre et .

Soit un entier naturel non nul. On définit **un schéma de Bernoulli de paramètres et**  lorsqu’on répète fois de façon indépendante cette épreuve de Bernoulli.

L’arbre ci-dessus représente un schéma de Bernoulli de paramètres et .

## Loi binomiale

***Définition***

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres et . Soit la variable aléatoire **comptant le nombre de succès** obtenus parmi épreuves.

La loi de probabilité de s’appelle la loi binomiale de paramètres et .

On note la loi binomiale.

***Remarque :***

Le nombre de succès parmi épreuves peut aller de à . Complétons l’exemple précédent :

La variable aléatoire « nombre de succès » suit la loi de paramètres et .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | | | | Résultat | |  | Probabilité | |
|  | |  |  | |
|  | |  |  | |
|  | |  |  | |
|  | |  |  | |
|  | |  |  | |
|  | |  |  | |
|  | |  |  | |
|  | |  |  | |
|  | |  |  | |
|  | |  |  | |
|  | |  |  | |
|  | |  |  | |
|  | |  |  | |
|  | |  |  | |
|  | |  |  | |
|  | |  |  | |
| La loi de probabilité de est résumée dans le tableau suivant : | | | | | | |  | |  |  | |
|  |  |  |  |  |  | | TOTAL | | |
|  |  |  |  |  |  | |  | | |

Les coefficients **1 4 6 4 1** sont des **coefficients binomiaux**. Ils indiquent le nombre de chemins possibles pour un nombre de succès donné.

On les note : (voir le chapitre 2 combinatoire et dénombrements).

* La loi de probabilité de a les valeurs numériques suivantes  :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  | TOTAL |
|  |  |  |  |  |  |  |

* La loi de probabilité peut être obtenue dans les listes statistiques de la calculatrice TI :
* Appuyer sur la touche Stats, puis dans le menu EDIT choisir EffListe[[2]](#footnote-2) L1, L2
* Appuyer sur Stats, puis dans le menu EDIT choisir Modifier. Remplir la liste L1 avec 0, 1, 2, 3, 4.
* Sélectionner le titre de la colonne L2, entrée, et saisir la formule
  + nbrEssais :4
  + p = 0.4
  + valeur de x : L1

Pour trouver la fonction binomFdp, appuyer sur  et descendre dans le menu DISTRIB.

La représentation graphique de la loi de probabilité de avec 2nd graph stats :

|  |  |
| --- | --- |
| * Graph 1 Entrée * Activer l’affichage * Type : 1er type de graphique * Liste X : L1 * Liste Y : L2 * Marque : points en forme de croix   Réglage de la fenêtre :   * fenêtre * Xmin = 0 * X max = 4 * X grad = 1 * Ymin = 0 * Y max = 0,4 * Y grad = 0,1 * Xres = 1 |  |

|  |  |
| --- | --- |
| GeoGebra permet d’obtenir un diagramme en bâtons : |  |

Si suit la loi binomiale de paramètres et , alors pour tout entier compris entre et , on a :

## Espérance et variance de la loi binomiale

L’espérance d’une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres et est :

Sa variance est :

Son écart type est :

***Exemples :***

|  |
| --- |
| ***Si*  suit la loi binomiale alors :**   * Pour tout entier de à  : * En notant l’espérance de , on a : * Variance et écart type : |
|  |
|  |
|  |
| **Si suit la loi binomiale alors :**   * Pour tout entier de à  : * En notant l’espérance de , on a : * Variance et l’écart type : |
| *L’écart type est plus petit : les valeurs sont plus concentrées autour de μ.* |

1. Jaques **Bernoulli** : ([1654](https://fr.wikipedia.org/wiki/1654_en_science)-[1705](https://fr.wikipedia.org/wiki/1705_en_science)) est un [mathématicien](https://fr.wikipedia.org/wiki/Math%C3%A9maticien) et [physicien](https://fr.wikipedia.org/wiki/Physicien) [suisse](https://fr.wikipedia.org/wiki/Suisse) (né et mort à [Bâle](https://fr.wikipedia.org/wiki/B%C3%A2le)) [↑](#footnote-ref-1)
2. Pour toute nouvelle utilisation des fonctions statistiques, penser à effacer les listes précédentes. Ainsi l’ancien contenu ne sera pas pris en compte dans les nouveaux calculs. [↑](#footnote-ref-2)