CHAPITRE 3 : Loi binomiale

CHAPITRE 3 : Loi binomiale

1 Succession d'épreuves indépendantes

1.1 Univers d'une succession d'épreuves

Définition

On peut représenter une succession de n épreuves indépendantes $E_1,\ E_2,\ E_3,\ \dots, E_n$ par **un arbre pondéré** à n niveaux.

On considère n épreuves indépendantes ayant pour univers respectifs $\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3,\ \dots,\ \Omega_n$.

La succession de ces n épreuves indépendantes constitue une épreuve dont les issues sont les éléments du **produit cartésien** $\boldsymbol{\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \times \dots \times \Omega_n}$.

Exemple

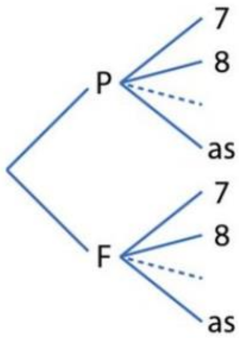
1. Première épreuve E_1 : lancer d'une pièce.

   L'univers $\Omega_1 = \{Pile\ ;Face\}$.

2. Deuxième épreuve E_2 : on tire une carte parmi huit cartes.

   L'univers $\Omega_2 = \{7\ ;8\ ;9\ ;10\ ;valet\ ;dame\ ;roi\ ;as\}$.

La succession de ces 2 épreuves indépendantes constitue une épreuve dont les issues sont les éléments de $\boldsymbol{\Omega_1 \times \Omega_2} = \{(Pile\ ;7); (Pile\ ;8);\ (Pile\ ;9); \dots;\ (Face\ ;Roi);\ (Face\ ;as)\}$



1.2 Calcul de probabilités

Propriété (admise)

Lors d'une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités de chacune des issues du n-uplet.

Exemple 1

Reprenons l'exemple précédent. Si on suppose que la pièce est bien équilibrée et que le tirage de la carte est au hasard, alors la probabilité de l'issue $(Pile\ ; 7)$ est égale à :

$$P\big((P;7)\big) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8}$$

$$P\big((P;7)\big) = \frac{1}{16}$$

Exemple 2

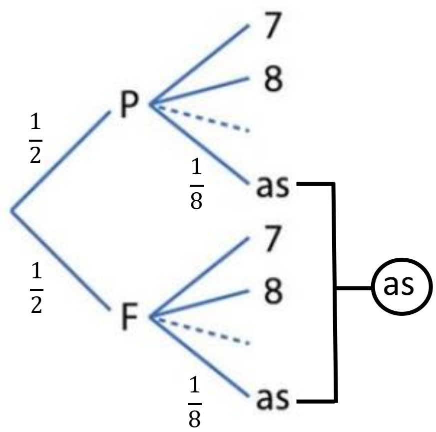
Toujours avec l'exemple précédent, la probabilité d'obtenir un as est égale à :

$$P(as) = P\big((P;as)\big) + p\big((F;as)\big)$$

$$P(as) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{8}$$

$$P(as) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$$

$$P(as) = \frac{1}{8}$$



2 Schéma de Bernoulli et loi binomiale

2.1 Epreuve et schéma de Bernoulli

Définition

Epreuve de Bernoulli (lire « Bernouilli »)

On appelle épreuve de Bernoulli[1] toute expérience aléatoire n'ayant que deux issues. Une issue est considérée somme un « succès » et l'autre issue comme un « échec ».

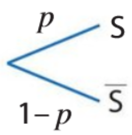
Si p est la probabilité du succès alors $q = 1 - p$ est la probabilité de l'échec.

<u>Exemple :</u>

Une urne contient 10 boules : 6 noires et 4 boules blanches. On prélève au hasard une boule de l'urne. On considère comme :

- « succès » S : la boule est blanche avec la probabilité $p = 0{,}4$
- « échec » $\bar{S}$: la boule est noire avec la probabilité $q = 0{,}6$

On peut représenter une épreuve de Bernoulli par un arbre :



Sa loi de probabilité est très simple :

x_i	S	$\bar{S}$	TOTAL
$P(X = x_i)$	0,4	0,6	1

La plupart du temps, on ne considère pas une seule épreuve de Bernoulli.

On considère une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

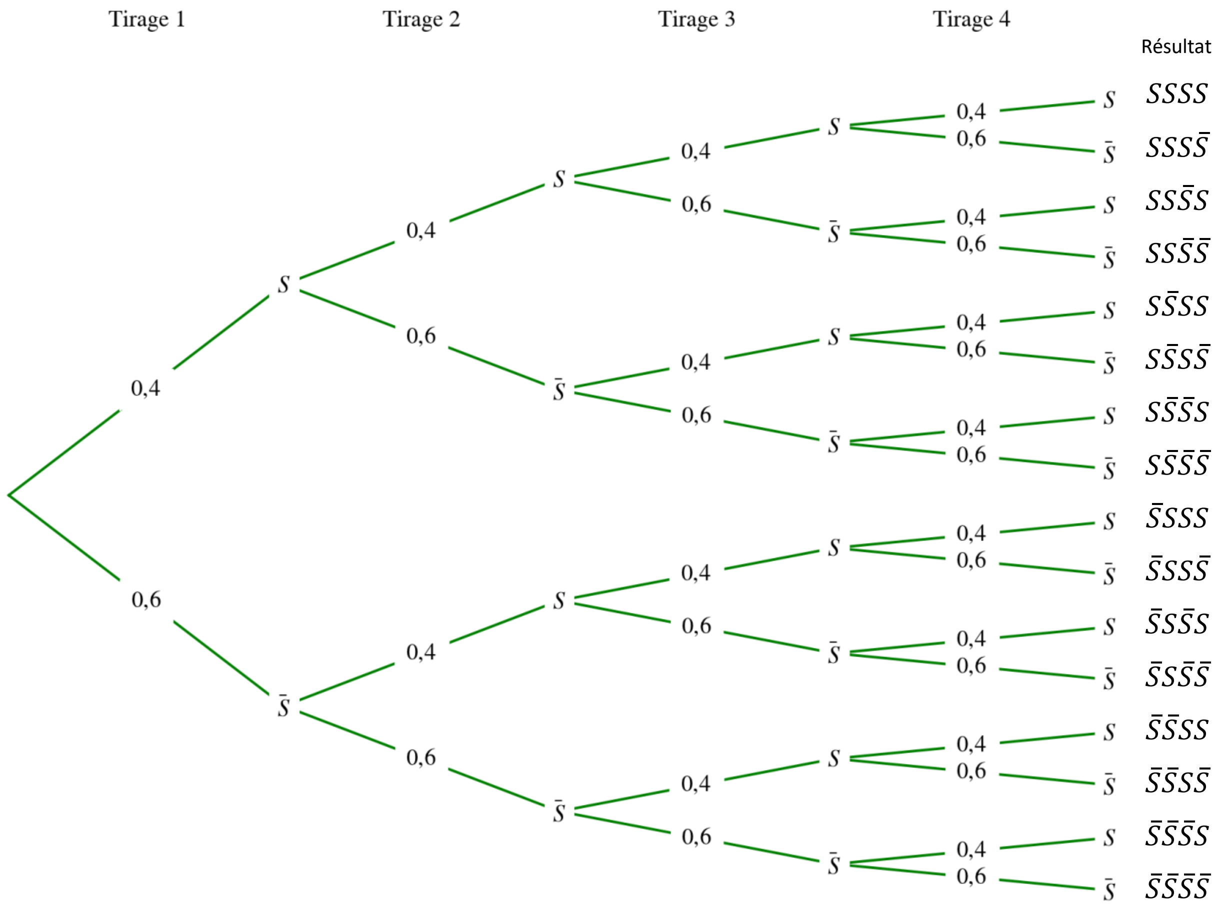
<u>Exemple :</u>

Une urne contient 10 boules : 6 noires et 4 boules blanches. On prélève au hasard successivement, **avec remise**, 4 boules de l'urne. X désigne le nombre de boules blanches obtenues. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

[1] Jaques **Bernoulli** : (1654-1705) est un mathématicien et physicien suisse (né et mort à Bâle)

Réponse :
Un tirage de 4 boules consiste en 4 épreuves, identiques et indépendantes (car les prélèvements sont avec remise). Chaque épreuve a deux issues possibles :

- « succès » S : la boule est blanche avec la probabilité $p = 0{,}4$
- « échec » $\bar{S}$: la boule est noire avec la probabilité $q = 0{,}6$
- On peut représenter un schéma de Bernoulli par un arbre :



La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\mathbf{1} \times 0{,}4^0 \times 0{,}6^4$	$\mathbf{4} \times 0{,}4^1 \times 0{,}6^3$	$\mathbf{6} \times 0{,}4^2 \times 0{,}6^2$	$\mathbf{4} \times 0{,}4^3 \times 0{,}6^1$	$\mathbf{1} \times 0{,}4^4 \times 0{,}6^0$

Propriété

On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel compris entre 0 et 1.

Soit n un entier naturel non nul. On définit **un schéma de Bernoulli de paramètres n et p** lorsqu'on répète n fois de façon indépendante cette épreuve de Bernoulli.

L'arbre ci-dessus représente un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}4$.

2.2 Loi binomiale

Définition

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. Soit X la variable aléatoire **comptant le nombre de succès** obtenus parmi n épreuves.

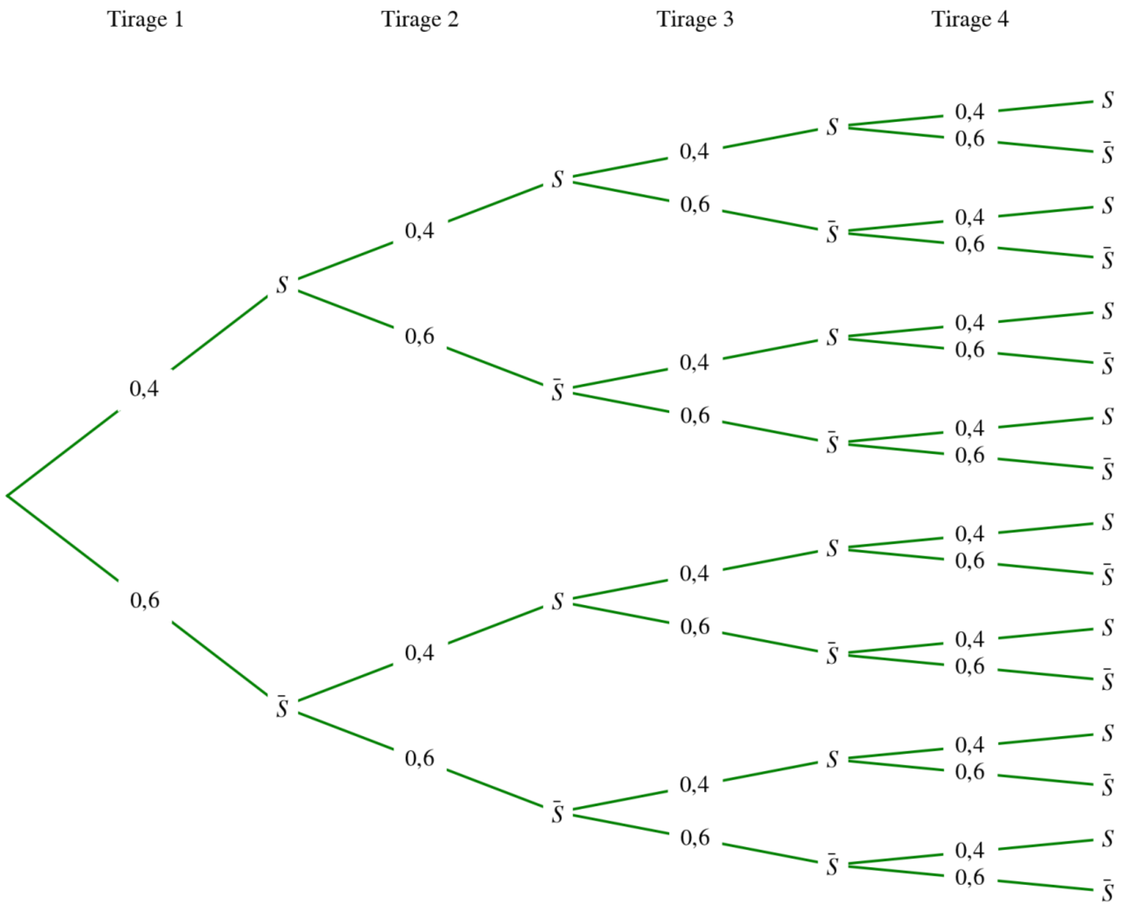
La loi de probabilité de X s'appelle la loi binomiale de paramètres n et p.

On note $\mathcal{B}(n\,;p)$ la loi binomiale.

Remarque :

Le nombre de succès parmi n épreuves peut aller de 0 à n. Complétons l'exemple précédent :

La variable aléatoire X « nombre de succès » suit la loi $\mathcal{B}(n\,,p)$ de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}4$.



Résultat	X	Probabilité
$SSSS$	4	$0{,}4^4 \times 0{,}6^0$
$SSS\bar{S}$	3	$0{,}4^3 \times 0{,}6^1$
$SS\bar{S}S$	3	$0{,}4^3 \times 0{,}6^1$
$SS\bar{S}\bar{S}$	2	$0{,}4^2 \times 0{,}6^2$
$S\bar{S}SS$	3	$0{,}4^3 \times 0{,}6^1$
$S\bar{S}S\bar{S}$	2	$0{,}4^2 \times 0{,}6^2$
$S\bar{S}\bar{S}S$	2	$0{,}4^2 \times 0{,}6^2$
$S\bar{S}\bar{S}\bar{S}$	1	$0{,}4^1 \times 0{,}6^3$
$\bar{S}SSS$	3	$0{,}4^3 \times 0{,}6^1$
$\bar{S}SS\bar{S}$	2	$0{,}4^2 \times 0{,}6^2$
$\bar{S}S\bar{S}S$	2	$0{,}4^2 \times 0{,}6^2$
$\bar{S}S\bar{S}\bar{S}$	1	$0{,}4^1 \times 0{,}6^3$
$\bar{S}\bar{S}SS$	2	$0{,}4^2 \times 0{,}6^2$
$\bar{S}\bar{S}S\bar{S}$	1	$0{,}4^1 \times 0{,}6^3$
$\bar{S}\bar{S}\bar{S}S$	1	$0{,}4^1 \times 0{,}6^3$
$\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}$	0	$0{,}4^0 \times 0{,}6^4$

La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	TOTAL
$P(X = x_i)$	$\mathbf{1} \times 0{,}4^0 \times 0{,}6^4$	$\mathbf{4} \times 0{,}4^1 \times 0{,}6^3$	$\mathbf{6} \times 0{,}4^2 \times 0{,}6^2$	$\mathbf{4} \times 0{,}4^3 \times 0{,}6^1$	$\mathbf{1} \times 0{,}4^4 \times 0{,}6^0$	1

Les coefficients **1 4 6 4 1** sont des **coefficients binomiaux**. Ils indiquent le nombre de chemins possibles pour un nombre de succès donné.

On les note : $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$ (voir le chapitre 2 combinatoire et dénombrements).

- La loi de probabilité de X a les valeurs numériques suivantes :

x_i	0	1	2	3	4	TOTAL
$P(X = x_i)$	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256	1

- La loi de probabilité peut être obtenue dans les listes statistiques de la calculatrice TI :
- Appuyer sur la touche Stats, puis dans le menu EDIT choisir EffListe[2] L_1, L_2
- Appuyer sur Stats, puis dans le menu EDIT choisir Modifier. Remplir la liste L_1 avec 0, 1, 2, 3, 4.
- Sélectionner le titre de la colonne L_2, entrée, et saisir la formule $L_2 = \text{binomFdp(}$
    - nbrEssais :4
    - p = 0.4
    - valeur de x : L_1

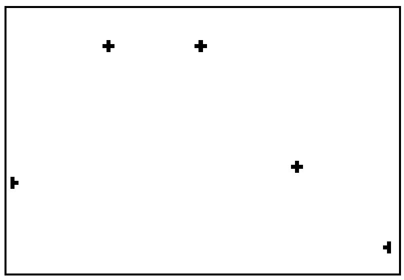
Pour trouver la fonction binomFdp, appuyer sur (2nde) [distrib] et descendre dans le menu DISTRIB.

La représentation graphique de la loi de probabilité de X avec 2[nd] graph stats :

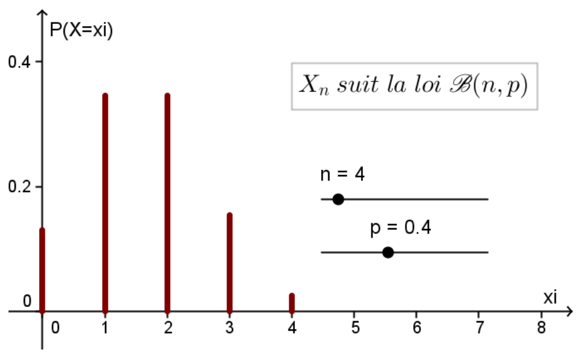
- Graph 1 Entrée
- Activer l'affichage
- Type : 1[er] type de graphique
- Liste X : L_1
- Liste Y : L_2
- Marque : points en forme de croix

Réglage de la fenêtre :

- fenêtre
- Xmin = 0
- X max = 4
- X grad = 1
- Ymin = 0
- Y max = 0,4
- Y grad = 0,1
- Xres = 1



GeoGebra permet d'obtenir un diagramme en bâtons :



Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors pour tout entier k compris entre 0 et n, on a :

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \times q^{n-k}}$$

[2] Pour toute nouvelle utilisation des fonctions statistiques, penser à effacer les listes précédentes. Ainsi l'ancien contenu ne sera pas pris en compte dans les nouveaux calculs.

2.3 Espérance et variance de la loi binomiale

L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n et p est :

$$\boxed{E(X) = np}$$

Sa variance est :

$$\boxed{V(X) = npq}$$

Son écart type est :

$$\boxed{\sigma = \sqrt{npq}}$$

Exemples :

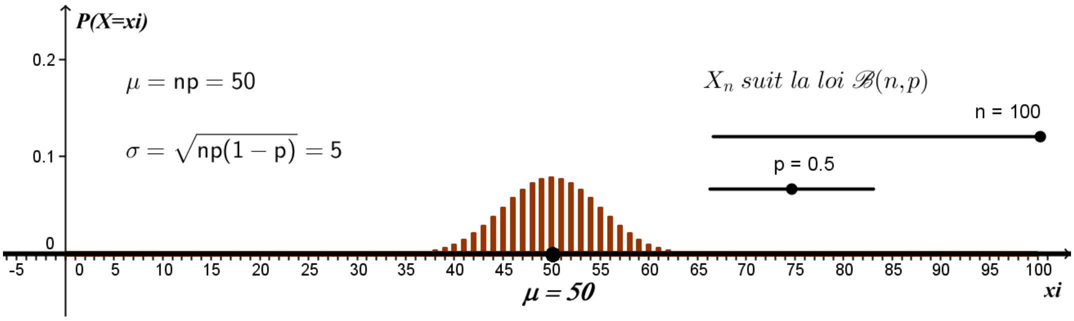
Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100\,;0,50)$ alors :

- Pour tout k entier de 0 à 100 :

$$P(X = k) = \binom{100}{k} 0{,}5^k \times 0{,}5^{100-k}$$

- En notant μ l'espérance de X, on a : $\mu = 100 \times 0{,}5 = 50$
- Variance et écart type : $V(X) = 100 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 25$

$$\sigma = \sqrt{25} = 5$$



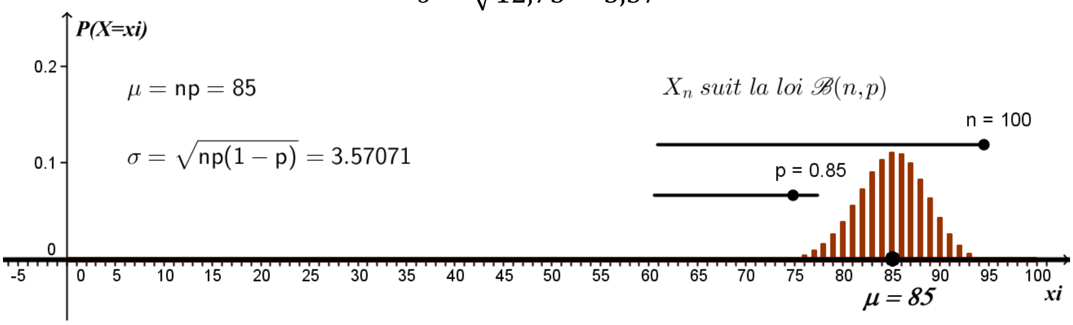
Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100\,;0,85)$ alors :

- Pour tout k entier de 0 à 100 :

$$P(X = k) = \binom{100}{k} 0{,}85^k \times 0{,}15^{100-k}$$

- En notant μ l'espérance de X, on a : $\mu = 100 \times 0{,}85 = 85$
- Variance et l'écart type : $V(X) = 100 \times 0{,}85 \times 0{,}15 = 12{,}75$

$$\sigma = \sqrt{12{,}75} \approx 3{,}57$$



L'écart type est plus petit : les valeurs sont plus concentrées autour de μ.