CHAPITRE 4 : Fonction logarithme

CHAPITRE 4 : Fonction logarithme

1 Fonction logarithme népérien

1.1 Fonction réciproque de la fonction exponentielle

Définition

- Pour tout réel $a > 0$, l'équation

$$e^x = a$$

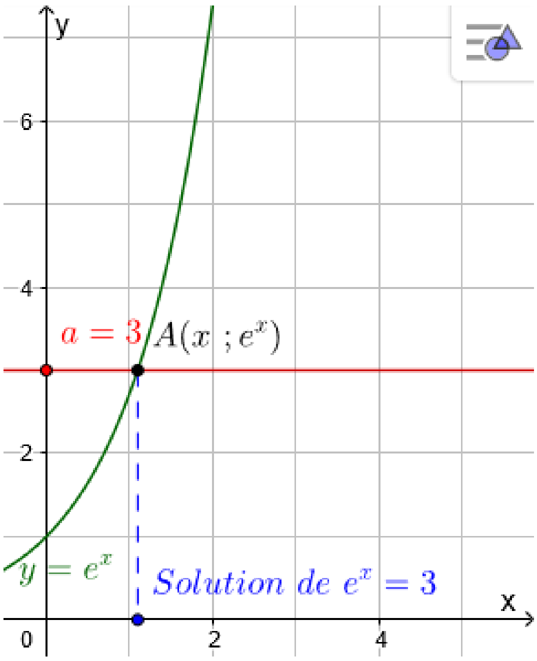
admet **une solution unique** dans $\mathbb{R}$.

Cette solution se note $x = \ln{(a)}$.

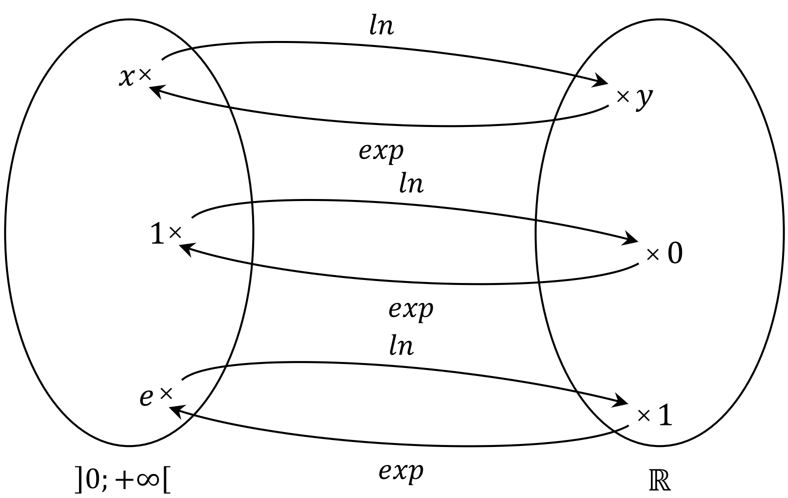
Elle s'appelle **le logarithme népérien de $\boldsymbol{a}$.**

Sur l'exemple de la figure ci-contre, on voit que

$$\ln{(3)} \approx 1{,}1$$



- La fonction qui, à tout réel $x > 0$, associe le réel $y = \ln{(x)}$ s'appelle la fonction logarithme néperien[1]. C'est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ et elle est notée ln.



[1] **Neper** (John), *baron* **de Merchiston,** mathématicien écossais (Merchiston, près d'Édimbourg, 1550 - 1617). On lui doit l'invention des logarithmes (1614).

Remarques sur le langage :

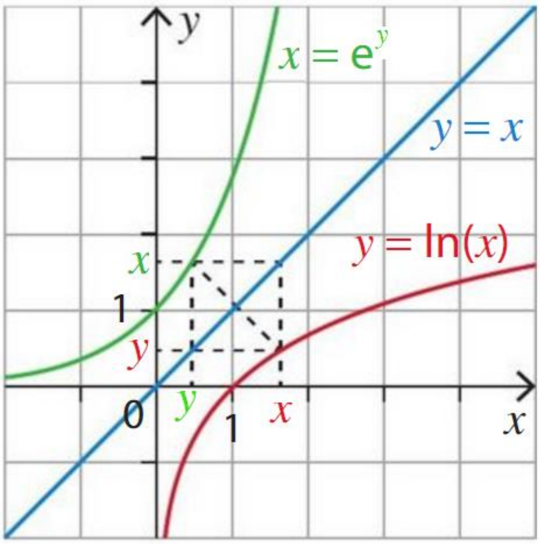
On dit que la fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;+\infty[$.

ln est elle-même une bijection de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. C'est la bijection réciproque de exp

Conséquences :

(1) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, y = \ln(x) \iff x = e^y$
(2) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, e^{\ln(x)} = x$
(3) $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$
(4) $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

Remarque 1 : Leurs courbes représentatives, dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Remarque 2 :

En sciences, on utilise aussi la **fonction logarithme décimal, notée log**, définie pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$ par :

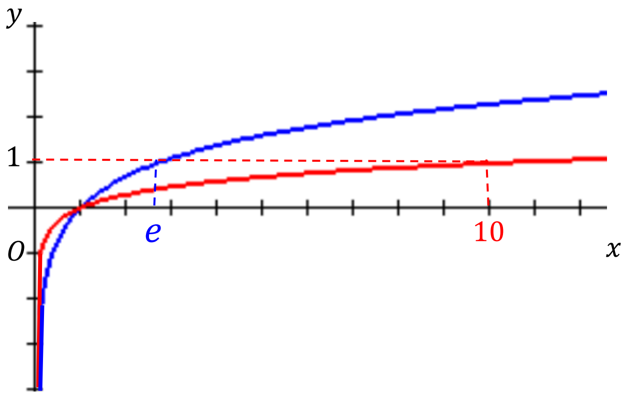
$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

soit approximativement :

$$\log(x) \approx \frac{\ln(x)}{2{,}303}$$

$$\log(x) \approx \ln(x) \times 0{,}434$$

Elle vérifie les relations $\log(1) = 0$ et $\log(10) = 1$.



La courbe de la fonction logarithme népérien (en bleu) et de la fonction logarithme décimal (en rouge).

1.2 Relation fonctionnelle et propriétés algébriques

Pour tous réels a et b strictement positifs,

Propriété (relation fonctionnelle)

(1) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

Propriétés (conséquences de la relation fonctionnelle)

(2) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

(3) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

(4) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$

(5) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

2 Variations et limites de la fonction *ln*

2.1 Dérivée et variations

Propriétés

- La fonction ln est **continue** sur $]0; +\infty[$
- La fonction ln est **dérivable** sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel x de $]0; +\infty[$: $\boldsymbol{(\ln)'(x) = \frac{1}{x}}$

Soit u une fonction **dérivable** et **strictement positive** sur un intervalle I.

La fonction $\ln(u)$ est **dérivable sur *I*** $\boldsymbol{(\ln(u))' = \frac{u'}{u}}$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Calculez la dérivée de f.

On pose $f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Propriété

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$, par $f(x) = \ln(x)$. On a : $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Donc pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Conséquences

$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$ pour tous réels a et b strictement positifs

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x) = 1 + \ln(3)$

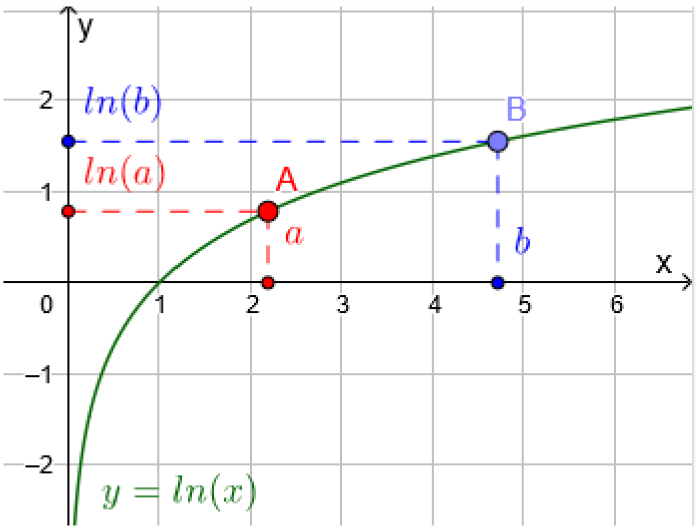
- Condition d'existence : $x > 0$
- Pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, $\ln(x) = 1 + \ln(3)$ équivaut successivement à :

  $\ln(x) = \ln(e) + \ln(3)$

  $\ln(x) = \ln(3e)$

  $x = 3e$ d'où l'ensemble des solutions $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{3e}\}$

$\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$ pour tous réels a et b strictement positifs



Exemple 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(x) < 0$

- Condition d'existence : $x > 0$
- Pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, $\ln(x) < 0$ équivaut successivement à :

  $\ln(x) < \ln(1)$

  $x < 1$

  d'où l'ensemble des solutions $\boldsymbol{S} =]\boldsymbol{0}\,;\boldsymbol{1}[$

Exemple 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(x) > 0$

- Condition d'existence : $x > 0$
- Pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, $\ln(x) > 0$ équivaut successivement à :

  $\ln(x) > \ln(1)$

  $x > 1$

  d'où l'ensemble des solutions $\boldsymbol{S} =]\boldsymbol{1}\,;+\infty[$

Exemple 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(3x+1) < 2$

- Condition d'existence : $3x+1 > 0 \iff x > -\frac{1}{3}$
- Pour tout réel $x \in \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$, $\ln(3x+1) < 2$ équivaut successivement à :

  $\ln(3x+1) < \ln\left(e^2\right)$

  $3x+1 < e^2$

  $x < \frac{e^2-1}{3}$ $\qquad \frac{e^2-1}{3} \approx 2{,}130$ $\qquad$ d'où l'ensemble des solutions $\boldsymbol{S} = \left]-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\,;\,\frac{\boldsymbol{e^2-1}}{\mathbf{3}}\right[$

2.2 Limites

Propriétés

$\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Conséquences

$\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc la courbe de la fonction ln a une asymptote verticale d'équation $x = 0$

Le tableau de variation de la fonction ln est le suivant :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$(\ln)'(x)$	‖ $\qquad$ $+$
variation de ln	‖ $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

Propriétés (croissances comparées)

$$\boldsymbol{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\left(x.\ln(x)\right) = 0}$$

Pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\left(x^n.\ln(x)\right) = 0}$$