CHAPITRE 5 : Géométrie dans l’espace

[1 Vecteurs de l’espace 3](#_Toc60359950)

[1.1 Définition d’un vecteur de l’espace 3](#_Toc60359951)

[1.2 Opérations sur les vecteurs de l’espace 4](#_Toc60359952)

[2 Droites et plans de l’espace 6](#_Toc60359953)

[2.1 Caractérisation vectorielle d’une droite 6](#_Toc60359954)

[2.2 Caractérisation vectorielle d’un plan 7](#_Toc60359955)

[3 Positions relatives de droites et de plans 9](#_Toc60359956)

[3.1 Positions relatives de deux droites 9](#_Toc60359957)

[3.2 Positions relatives d’une droite et d’un plan 10](#_Toc60359958)

[3.3 Positions relatives de deux plans 11](#_Toc60359959)

[4 Repères de l’espace 13](#_Toc60359960)

[4.1 Base de l’espace 13](#_Toc60359961)

[4.2 Repère de l’espace 14](#_Toc60359962)

[5 Produit scalaire dans l’espace 16](#_Toc60359963)

[5.1 Extension du produit scalaire à l’espace 16](#_Toc60359964)

[5.2 Propriétés algébriques du produit scalaire 17](#_Toc60359965)

[5.3 Orthogonalité de deux vecteurs 19](#_Toc60359966)

[6 Orthogonalité dans l’espace 19](#_Toc60359967)

[6.1 Orthogonalité de deux droites 19](#_Toc60359968)

[6.2 Orthogonalité d’un plan et d’une droite 21](#_Toc60359969)

[7 Vecteur normal, projeté orthogonal 24](#_Toc60359970)

[7.1 Vecteur normal à un plan 24](#_Toc60359971)

[7.2 Projeté orthogonal d’un point 26](#_Toc60359972)

[7.2.1 Projection d’un point sur une droite 26](#_Toc60359973)

[7.2.2 Projection d’un point sur un plan 26](#_Toc60359974)

[8 Calculs de distances dans l’espace 26](#_Toc60359975)

[8.1 Calculs dans une base orthonormée ; Calculs dans un repère orthonormé 26](#_Toc60359976)

[8.2 Propriétés 28](#_Toc60359977)

[8.2.1 Distance d’un point à un plan 28](#_Toc60359978)

[8.2.2 Distance d’un point à une droite 29](#_Toc60359979)

[9 Représentation paramétrique d’une droite 29](#_Toc60359980)

[9.1 Caractérisation des points appartenant à une droite 29](#_Toc60359981)

[9.2 Représentation paramétrique d’une droite 30](#_Toc60359982)

[10 Equation cartésienne d’un plan dans l’espace 31](#_Toc60359983)

[10.1 Caractérisation des points appartenant à un plan par le produit scalaire 31](#_Toc60359984)

[10.2 Equation cartésienne d’un plan 32](#_Toc60359985)

CHAPITRE 5 : Géométrie dans l’espace

# Vecteurs de l’espace

## Définition d’un vecteur de l’espace

***Propriété et définition***

* Soient et deux points de l’espace. On associe le vecteur à la translation qui transforme en .

|  |
| --- |
|  |
| ***Figure 1*** |

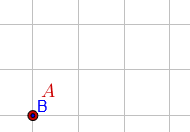
* Deux vecteurs et sont égaux si et seulement si est un parallélogramme (éventuellement aplati).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| ***Figure 2*** |  | ***Parallélogramme aplati*** |

* On peut alors noter .
* et sont des **représentants** du vecteur .
* Un vecteur a une infinité de représentants. Par exemple, sur la figure 1, si on appelle le vecteur de la translation alors a pour représentants etc.

***Remarques***

* Deux vecteurs sont égaux si et seulement s’ils ont la même direction, le même sens et la même norme. Par exemple sur la figure 2, les vecteurs et ont la direction horizontale. Sur cette direction, ils ont le sens de gauche à droite. Enfin, ils ont pour norme .
* Lorsque et sont confondus, on dit que le vecteur est nul et on le note . Ce vecteur nul a une norme égale à 0, mais n’a ni direction ni sens.



***Théorème (admis)***

* Soient un vecteur et un point de l’espace. **Il existe un unique point**  tel que

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| ***Vu dans le plan*** |  | ***Vu dans l’espace*** |

* On dit que est le représentant du vecteur d’origine

## Opérations sur les vecteurs de l’espace

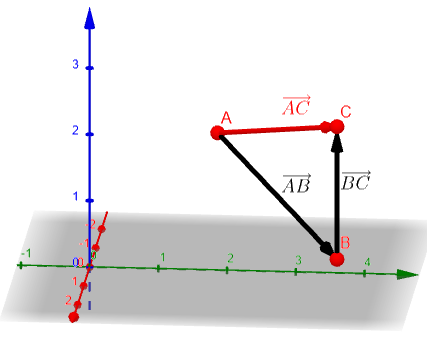
***Définition (règle du parallélogramme)***

* Soient les vecteurs et de l’espace de représentants respectifs et
* La somme des vecteurs et est le vecteur noté de représentant tel que soit un parallélogramme.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

***Propriété (relation de Chasles)***

Pour tous points et de l’espace,



***Définition***

* Soient un vecteur non nul et un réel non nul.

Le vecteur est le vecteur qui a :

* + la même direction que le vecteur
  + le même sens que si , le sens contraire de si
  + pour norme

|  |  |
| --- | --- |
| Exemple avec | Exemple avec |
|  |  |
| ***Figure 3*** | ***Figure 4*** |

* Pour tout vecteur et pour tout réel , .

***Propriétés***

Soient et deux vecteurs de l’espace. Soient et deux réels.

***Définition***

Soient et deux vecteurs de l’espace.

On dit que et sont colinéaires s’il existe un réel tel que ou (voir les figures 3 et 4).

***Remarques***

* Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement s’ils ont la même direction.
* Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

# Droites et plans de l’espace

## Caractérisation vectorielle d’une droite

***Définition***

Soient et deux points distincts de l’espace.

La droite est l’ensemble des points de l’espace tels que , où .

|  |
| --- |
|  |
| A chaque point de la droite correspond un unique réel . Ici, est tel que . |

***Remarque***

Un point et un vecteur directeur suffisent à déterminer une droite : c’est la droite passant par le point et de vecteur directeur .

## Caractérisation vectorielle d’un plan

***Définitions***

Soient , et trois vecteurs de l’espace tels que et ne sont pas colinéaires.

, et sont coplanaires lorsqu’il existe deux réels et tels que .

On dit alors que est une combinaison linéaire de et .

***Exemple***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Dans la pyramide régulière à base carrée ci-contre, on a l’égalité suivante :  Les vecteurs , sont donc coplanaires. |  |  |
| On remarque que , ne sont pas coplanaires. |  |  |

***Définitions***

On dit que **des points sont coplanaires** s’il existe un plan qui contient ces points.

Soient , et trois points non alignés de l’espace.

Le **plan** est l’ensemble des points tels que , où et .

et sont des **vecteurs directeurs du plan** .

Le couple est **une base** de ce plan.

Le triplet est **un repère** de ce plan.

***Remarques***

Trois points sont toujours coplanaires.

Un point et deux vecteurs non colinéaires et (ou trois points non alignés) suffisent à déterminer un plan : c’est le plan passant par et de vecteurs directeurs et .

Par exemple, dans la pyramide précédente, le point et les vecteurs non colinéaires et suffisent à déterminer le plan .

On dit que les vecteurs et dirigent le plan .

***Propriété***

Soient , et trois vecteurs de l’espace tels que , et .

, et sont coplanaires si et seulement si les points et sont coplanaires.

***Exemple***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | * On cherche des représentants à partir d’un même point. * , et ont en particulier pour représentants et . * Or les **points et sont coplanaires**, donc et sont coplanaires |  |
| , et sont-ils coplanaires ? |  | , et **sont coplanaires**. |

# Positions relatives de droites et de plans

## Positions relatives de deux droites

***Définitions***

Soient une droite de vecteur directeur et une droite de vecteur directeur.

* et sont **parallèles** lorsque et sont colinéaires.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| et sont **parallèles** |  |  |

* et sont **coplanaires** lorsqu’il existe un plan contenant et .
* et sont **non coplanaires** lorsqu’il n’existe aucun plan contenant et .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| et sont **coplanaires** | et sont **non coplanaires** |

***Propriétés***

Soient et quatre points distincts de l’espace.

Les droites et sont coplanaires équivaut à sont coplanaires.

Par exemple, sur la figure du cube ci-dessus, le plan gris contient , donc et sont coplanaires.

Deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes ou parallèles.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Dans le cube , les côtés du carré sont parallèles, donc |
|  |  |
| *Les droites et sont séantes en* ***donc et sont coplanaires*** | *Les droites et sont parallèles donc* ***et sont coplanaires*** |

Si deux droites sont non coplanaires alors leur intersection est vide.

|  |
| --- |
|  |
| ***et sont non coplanaires*** |

## Positions relatives d’une droite et d’un plan

Une droite est **parallèle à un plan** lorsqu’elle a un vecteur directeur colinéaire à un vecteur directeur de ce plan.

|  |
| --- |
|  |
| La droite a pour vecteur directeur  Le plan a pour vecteurs directeurs et  **et sont colinéaires** donc est parallèle au plan |

Si une droite **n’est pas parallèle à un plan** alors on dit qu’elle est sécante avec ce plan en un point.

|  |
| --- |
|  |
| La droite est **sécante avec le plan** au point |

## Positions relatives de deux plans

Deux plans sont parallèles lorsqu’ils ont un même couple de vecteurs directeurs.

|  |
| --- |
|  |
| et ont **en commun le couple de vecteurs directeurs** . Donc |
|  |

Deux plans non parallèles sont sécants suivant une droite.

|  |
| --- |
|  |
| et **ne sont pas parallèles donc ils sont sécants** suivant une droite . |

Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l’un coupe l’autre et les droites d’intersection sont parallèles.

|  |
| --- |
|  |
| et **sont parallèles**  coupe .  Donc coupe .  Et **les droites d’intersection** et **sont parallèles** |

***Théorème du toit***

Soient et deux plans.

Soient une droite incluse dans et une droite incluse dans telles que .

Si et sont sécants selon une droite , alors .

|  |
| --- |
|  |
| * La droite est incluse dans le plan . * La droite est incluse dans le plan . * Les plans et sont sécants.   Donc **d’après le théorème du toit**, leur droite d’intersection est parallèle à et . |

# Repères de l’espace

## Base de l’espace

***Définition***

Une base de l’espace est formée d’un triplet de vecteurs non coplanaires.

|  |
| --- |
|  |
| Exemple de base |

* Les vecteurs d’une base sont tous non nuls et non colinéaires deux à deux.

***Propriété et définition***

Soit une base de l’espace.

Pour tout vecteur de l’espace, il existe un unique triplet de réels tel que

sont **les coordonnées du vecteur** dans cette base. On note .

|  |
| --- |
|  |
| Si dans une base de l’espace, on a , alors on peut écrire |

## Repère de l’espace

***Définition***

Un repère de l’espace est formé d’un point donné et d’une base .

On note un tel repère.

est l’origine du repère. Ses coordonnées sont .

***Remarque***

En changeant l’ordre des vecteurs, on change le repère.

***Propriété et définition***

Soit un repère de l’espace.

pour tout point de l’espace, il existe un unique triplet de réels tel que :

sont **les coordonnées du point** dans ce repère. On note .

est l’**abscisse** de dans le repère , est l’**ordonnée** et est la **cote**.

|  |
| --- |
|  |
| On représente l’axe venant vers nous, l’axe vers la droite et l’axe vers le haut.  On a placé dans le repère , le point  Pour mieux voir, on peut placer de mêmes coordonnées que , mais avec une cote nulle. |

***Propriétés***

Soit un repère de l’espace.

Soient et deux vecteurs, un réel.

Soient les points et .

Le milieu du segment a pour coordonnées

|  |
| --- |
|  |
| Si et alors d’où |

Dans la base , et

Avec l’exemple précédent : et on a soit

Dans la base , et sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles

Puisque et on a soit . De plus, .

Les coordonnées de et de sont proportionnelles. Donc les vecteurs et sont colinéaires.

# Produit scalaire dans l’espace

## Extension du produit scalaire à l’espace

***Définition***

Soient et deux vecteurs de l’espace. Soient les points et tels que et .

Les points et étant coplanaires, le **produit scalaire** des vecteurs et qui est noté est le réel calculé dans un plan contenant les points .

ne dépend pas des représentants et choisis.

|  |
| --- |
|  |
| Sur l’exemple ci-dessus, si on veut calculer le produit scalaire  **alors** on pourra calculer . Mais on peut prendre d’autres représentants de et . Par exemple on peut calculer . |

***Propriétés***

Soient , et trois points de l’espace, et étant distincts de .

Si les vecteurs et sont tels que et , alors :

|  |
| --- |
| En reprenant le cube précédent et en se plaçant dans le plan on peut calculer  : |
|  |

On peut aussi projeter un vecteur sur la direction de l’autre.

Soit le projeté orthogonal de sur la droite .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1er cas : et ont le même sens |  | 2e cas : et sont de sens contraires |
|  |  |  |
|  |  |  |

|  |
| --- |
| On peut calculer en remarquant que le projeté orthogonal de sur la droite . |
| On est dans le 1er cas : et ont le même sens.  Donc |

***Remarque***

En particulier, est noté et est appelé **carré scalaire** de .

Dans l’exemple précédent, on a

## Propriétés algébriques du produit scalaire

Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan sont conservées dans l’espace.

***Propriétés***

Soient trois vecteurs , et et soit un nombre réel. On a :

(propriété de **symétrie**)

et (propriété de **bilinéarité**)

***Exemples :***

En appliquant la propriété de symétrie on a :

En appliquant la propriété de bilinéarité, on a :

Soient trois vecteurs , et . On a :

donc

donc

.

***Corollaires (formules de polarisation)*** On déduit des formules précédentes :

Ces formules permettent de calculer le produit scalaire de deux vecteurs lorsqu’on connait **la norme des vecteurs** et **la norme de leur somme ou de leur différence**.

****

|  |
| --- |
|  |
| ***Lien entre les diagonales d’un parallélogramme et la somme ou la différence de deux vecteurs*** |

## Orthogonalité de deux vecteurs

***Définition***

Deux vecteurs et sont **orthogonaux lorsque**

***Remarque***

Pour tout vecteur de l’espace, on a .

Ainsi le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l’espace.

# Orthogonalité dans l’espace

## Orthogonalité de deux droites

***Définition***

Soient et deux droites de l’espace.

et sont orthogonales si un vecteur directeur de l’une est orthogonal à un vecteur directeur de l’autre.

***Propriété***

Deux droites et de l’espace sont orthogonales si et seulement si tout vecteur directeur de est orthogonal à tout vecteur directeur de .

***Remarques***

* Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires.
* Dans l’espace, deux droites sont perpendiculaires si et seulement si elles sont sécantes selon un angle droit (c’est un cas particulier d’orthogonalité).
* Si deux droites sont perpendiculaires, alors elles sont orthogonales. La réciproque est fausse.

|  |
| --- |
|  |
| Les droites  **et** sont orthogonales, mais **ne sont pas coplanaires**.  Les droites et sont orthogonales et sont coplanaires.  Les droites et sont perpendiculaires.  Les droites  **et**  sont orthogonales, mais **ne sont pas perpendiculaires**. |

***Propriétés***

|  |
| --- |
| * Deux droites et de l’espace sont orthogonales si et seulement s’il existe une droite parallèle à et perpendiculaire . |
|  |
|  |

* Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l’une est orthogonale à l’autre.

|  |
| --- |
|  |
| et sont parallèles.  Alors toute droite orthogonale à est orthogonale à C’est le cas de la droite . |

* Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l’une est orthogonale à l’autre.

|  |
| --- |
|  |
| et sont orthogonales.  Alors toute droite parallèle à est orthogonale à . C’est le cas de la droite . |

## Orthogonalité d’un plan et d’une droite

***Définition***

Dans l’espace, soit un plan de base et une droite de vecteur directeur . La droite et le plan sont orthogonaux (ou perpendiculaires) si est **orthogonal à la fois à et à** .

|  |
| --- |
|  |
| est un vecteur directeur de  est une base de  est **orthogonal à la fois aux deux vecteurs non colinéaires et**  Donc est perpendiculaire à . |

|  |
| --- |
|  |
| est un vecteur directeur de  est une base de  est **orthogonal seulement à un seul vecteur**  Donc on ne peut pas en déduire que est perpendiculaire à . |

Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

|  |
| --- |
|  |
| est orthogonale à et est incluse dans le plan .  Donc  **est orthogonale à** |

Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l’une est orthogonal à l’autre.

|  |
| --- |
|  |
| est parallèle à et est orthogonale à .  Donc **est orthogonal à .** |

***Propriétés***

Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l’un est orthogonale à l’autre.

|  |
| --- |
|  |
| est parallèle à et est orthogonale à .  Donc **est orthogonale à .** |

Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles entre eux.

|  |
| --- |
|  |
| est orthogonal à et est orthogonal à . Donc  **et sont parallèles**. |

# Vecteur normal, projeté orthogonal

## Vecteur normal à un plan

***Définition***

Soit un plan de base . Un vecteur est **normal** à s’il est non nul et orthogonal à et à .

|  |
| --- |
|  |

***Propriété***

Soient un point et un vecteur non nul.

Il existe **un unique plan** passant par et de vecteur normal

|  |
| --- |
|  |

***Définition***

Soient un plan de vecteur normal et un plan de vecteur normal .

est **perpendiculaire** à si est orthogonal à .

|  |
| --- |
|  |

***Remarques***

Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur normal à un plan est **aussi un vecteur normal** à ce plan.

|  |
| --- |
|  |

Si deux vecteurs sont normaux à un même plan, alors ils sont **colinéaires entre eux**.

***Propriétés***

Un vecteur est normal à un plan si et seulement s’il est normal à tout vecteur directeur de .

|  |
| --- |
|  |

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est colinéaire à un vecteur normal à ce plan.

|  |
| --- |
|  |

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à un vecteur normal à ce plan.

|  |
| --- |
|  |

Soient un plan de vecteur normal et un plan de vecteur normal .

**et sont parallèles** si et seulement si **et sont colinéaires**.

|  |
| --- |
|  |

## Projeté orthogonal d’un point

### Projection d’un point sur une droite

Soient un point de l’espace et une droite.

Il existe un unique **plan passant par et orthogonal à** .

Le plan et la droite sont sécants en un point appelé le **projeté orthogonal de sur la droite**

|  |
| --- |
|  |

### Projection d’un point sur un plan

Soient un point de l’espace et un plan.

Il existe une unique **droite passant par et orthogonale à** .

Le plan et la droite sont sécants en un point appelé le **projeté orthogonal de sur le plan**

|  |
| --- |
|  |

# Calculs de distances dans l’espace

## Calculs dans une base orthonormée ; Calculs dans un repère orthonormé

***Définition***

Une base orthonormée de l’espace est une base de l’espace telle que ses trois vecteurs soient orthogonaux deux à deux et tous de norme .

Autrement dit, est une **base orthonormée** signifie que :

, , et

***Définition***

Un **repère orthonormé** est un repère tel que la base est orthonormé.

|  |
| --- |
|  |

***Propriété***

Dans une base orthonormée de l’espace, on considère deux vecteurs et .

On a alors et

|  |
| --- |
|  |
| et donc  donc |

***Corollaire***

Dans un repère orthonormé de l’espace, on considère les points et . Puisque alors

|  |
| --- |
|  |
| donc la distance |
|  |

## Propriétés

### Distance d’un point à un plan

Soient un point de l’espace et un plan passant par un point et de vecteur normal .

Le projeté orthogonal de sur le plan est noté . C’est le point de le plus proche de .

La distance est appelée **distance du point au plan**  et on a :

|  |
| --- |
|  |
| Rappel : la droite est perpendiculaire au plan |

### Distance d’un point à une droite

Soient un point de l’espace et une droite passant par un point et de vecteur directeur .

Le projeté orthogonal de sur la droite est noté . C’est le point de le plus proche de .

La distance est appelée **distance du point à la droite** et on a :

|  |
| --- |
|  |
| Rappel : la droite est perpendiculaire à la droite |

# Représentation paramétrique d’une droite

## Caractérisation des points appartenant à une droite

Soient un point et un vecteur non nul de l’espace.

On considère la droite de vecteur directeur et qui passe par .

Soit un point de l’espace.

Le point  **appartient à la droite**  si et seulement **s’il existe un réel tel que**

Autrement dit, les vecteurs  et sont colinéaires, ce qui se traduit en coordonnées :

|  |
| --- |
|  |

## Représentation paramétrique d’une droite

***Propriété et définition***

Soient et trois réels.

L’ensemble des points de l’espace dont les coordonnées vérifient le système d’équations paramétriques

, où décrit l’ensemble des réels, est la droite qui passe par le point et qui est dirigée par le vecteur .

Ce système est **une représentation paramétrique** de la droite .

|  |
| --- |
|  |
| a comme représentation paramétrique , où |

***Remarques***

* Une droite peut être définie par la donnée d’une représentation paramétrique.
* Chaque valeur de permet de déterminer les coordonnées d’un point de la droite. Réciproquement, à chaque point de la droite correspond une valeur de
* Une droite admet une infinité de représentations paramétriques : en prenant un autre vecteur directeur ou un autre point de cette droite, on obtient une nouvelle représentation paramétrique.

***Exemple***

Dans l’exemple si on choisit alors on obtient c’est-à-dire le point

Si on choisit , on a Le point de coordonnées est sur .

# Equation cartésienne d’un plan dans l’espace

## Caractérisation des points appartenant à un plan par le produit scalaire

***Propriété***

Soit un plan de l’espace. Soient un point de et un vecteur normal à . Un point de l’espace appartient au plan si et seulement si :

|  |
| --- |
|  |

* Un plan peut être défini par la donnée d’un point du plan et d’un vecteur normal à ce plan.

***Exemple***

|  |
| --- |
|  |

Soit le plan qui passe par et de vecteur normal . est-il sur  ?

Réponse :  équivaut à .

On calcule . .

donc le point  **n’appartient pas au plan** .

## Equation cartésienne d’un plan

***Propriétés et définition***

Soit un plan passant le point et de vecteur normal .

Le plan est l’ensemble des points de l’espace dont les coordonnées vérifient l’équation .

Pour calculer , il suffit de remplacer et dans l’équation par les coordonnées de .

Cette équation est une équation cartésienne du plan .

***Remarque***

Un plan admet une infinité d’équations cartésiennes : en choisissant un autre vecteur normal ou un autre point du plan, on obtient une nouvelle équation cartésienne.

***Propriété***

Soit un réel.

L’ensemble des points dont les coordonnées vérifient l’équation est un plan de vecteur normal .

***Exemple***

L’ensemble des points de l’espace dont les coordonnées vérifient l’équation est un plan dont un vecteur normal est .

Il passe par le point . (On a choisi ces coordonnées telles qu’elles vérifient l’équation).

***Remarque***

Un plan peut être défini par la donnée d’une de ses équations cartésiennes.