CHAPITRE 5 : Géométrie dans l’espace

CHAPITRE 5 : Géométrie dans l'espace

1 Vecteurs de l'espace

1.1 Définition d'un vecteur de l'espace

Propriété et définition

- Soient A et B deux points de l'espace. On associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ à la translation qui transforme A en B.

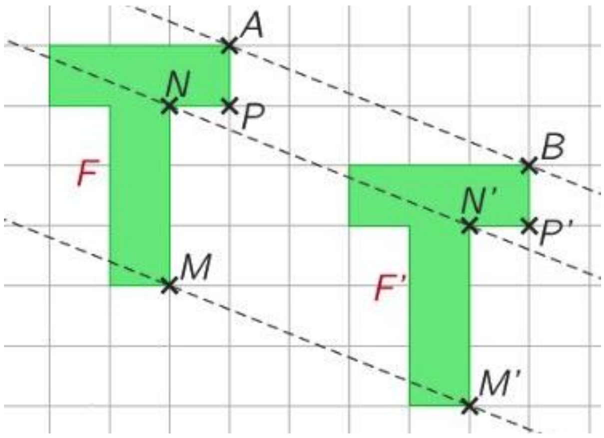


Figure 1

- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

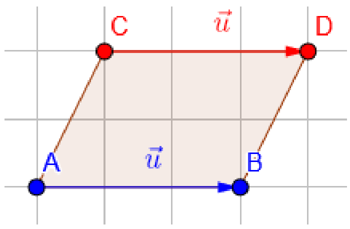
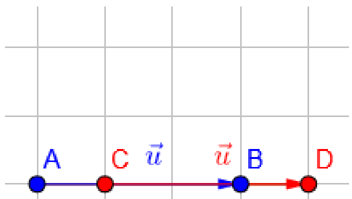


Figure 2



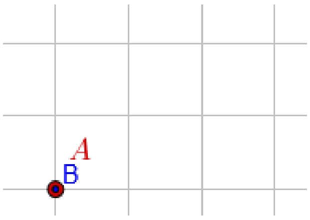
Parallélogramme aplati

- On peut alors noter $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des **représentants** du vecteur $\vec{u}$.
- Un vecteur a une infinité de représentants. Par exemple, sur la figure 1, si on appelle $\vec{u}$ le vecteur de la translation alors $\vec{u}$ a pour représentants $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NN'}$, $\overrightarrow{MM'}$, $\overrightarrow{PP'}$ etc.

Remarques

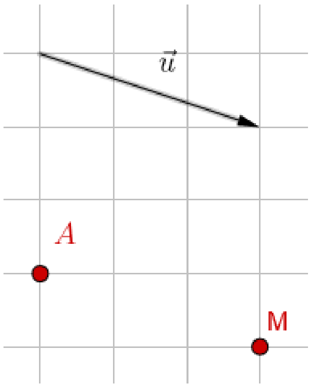
- Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme. Par exemple sur la figure 2, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la direction horizontale. Sur cette direction, ils ont le sens de gauche à droite. Enfin, ils ont pour norme 3.

- Lorsque A et B sont confondus, on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est nul et on le note $\vec{0}$. Ce vecteur nul a une norme égale à 0, mais n'a ni direction ni sens.

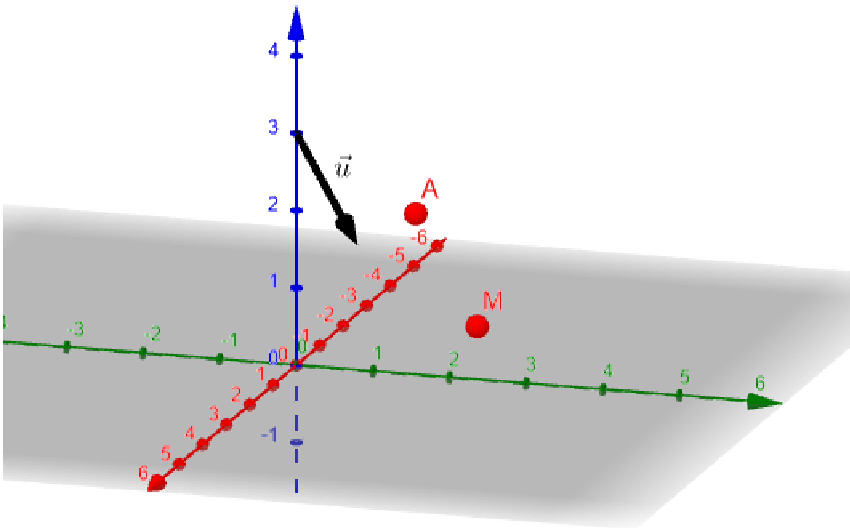


Théorème (admis)

- Soient $\vec{u}$ un vecteur et A un point de l'espace. **Il existe un unique point M** tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$



Vu dans le plan



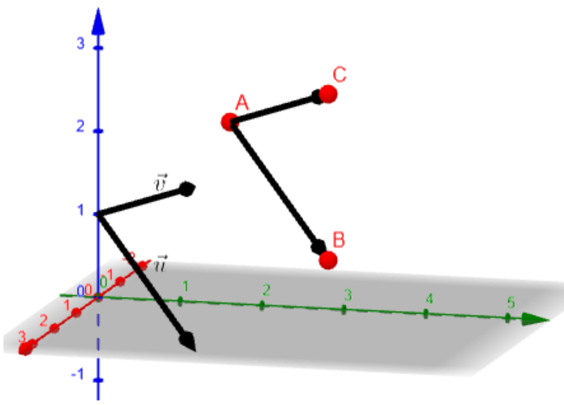
Vu dans l'espace

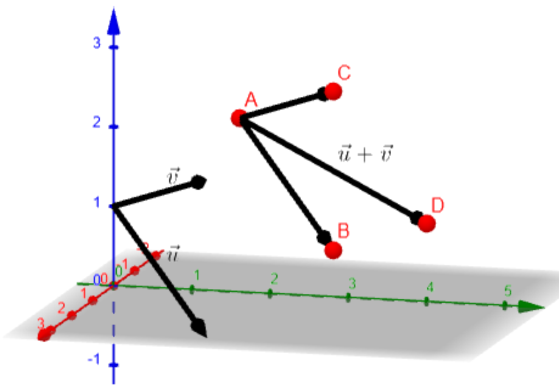
- On dit que $\overrightarrow{AM}$ est le représentant du vecteur $\vec{u}$ d'origine A

1.2 Opérations sur les vecteurs de l'espace

Définition (règle du parallélogramme)

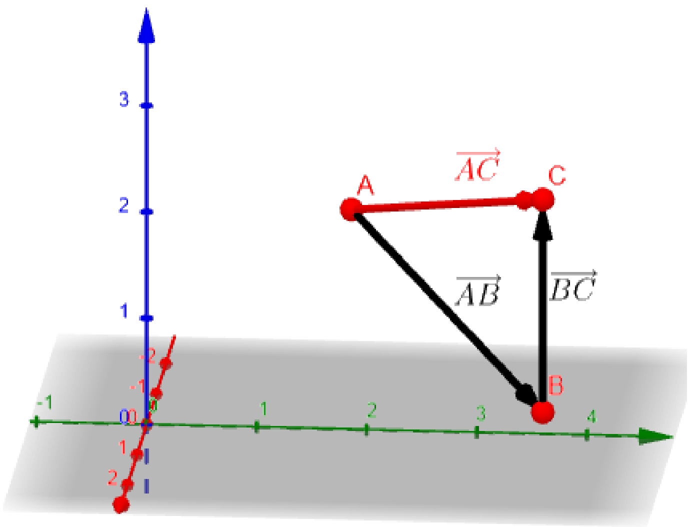
- Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace de représentants respectifs $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$
- La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ de représentant $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$ tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.





Propriété (relation de Chasles)

Pour tous points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Définition

- Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul.

Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur qui a :

- la même direction que le vecteur $\vec{u}$
- le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, le sens contraire de $\vec{u}$ si $k < 0$
- pour norme $|k| \times \|\vec{u}\|$

$k > 0$ Exemple avec $k = 2$

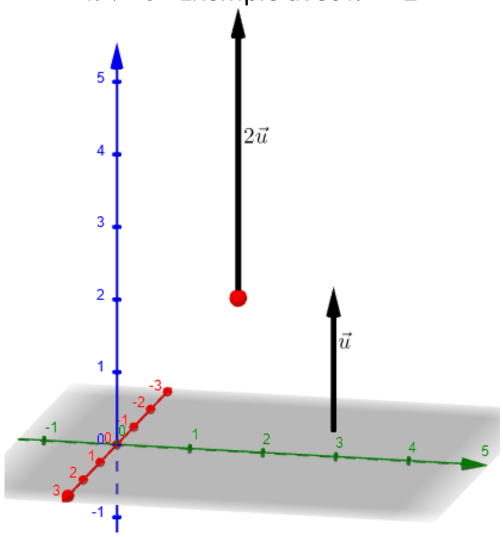


Figure 3

$k < 0$ Exemple avec $k = -0{,}5$

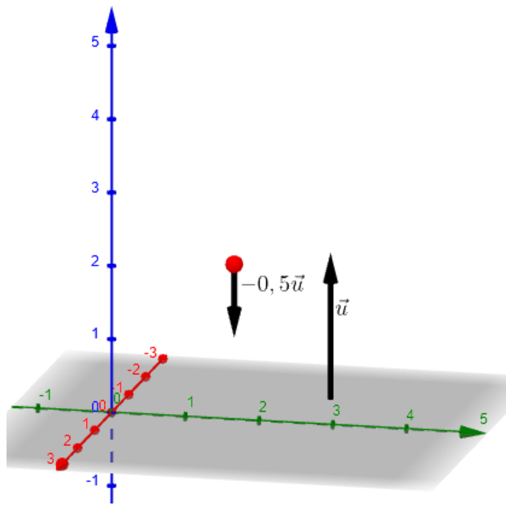


Figure 4

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout réel k, $0\,\vec{u} = k\,\vec{0} = \vec{0}$.

Propriétés

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient k et k' deux réels.

$$k\vec{u} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad k = 0 \quad ou \quad \vec{u} = \vec{0}$$

$$k(k'\,\vec{u}) = kk'\,\vec{u}$$

$$(k + k')\,\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$$

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$ (voir les figures 3 et 4).

Remarques

- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

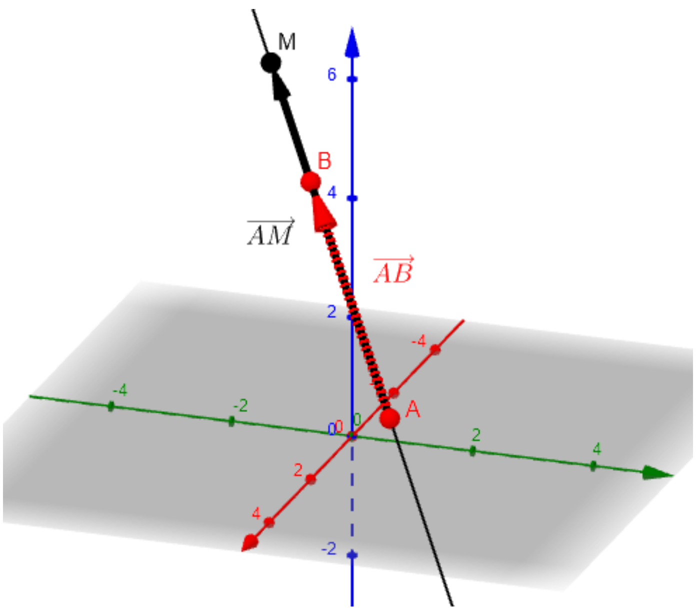
2 Droites et plans de l'espace

2.1 Caractérisation vectorielle d'une droite

Définition

Soient A et B deux points distincts de l'espace.

La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$, où $k \in \mathbb{R}$.



A chaque point M de la droite correspond un unique réel k . Ici, M est tel que $\overrightarrow{AM} = 1{,}5\,\overrightarrow{AB}$.

Remarque

Un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ suffisent à déterminer une droite : c'est la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2.2 Caractérisation vectorielle d'un plan

Définitions

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires lorsqu'il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

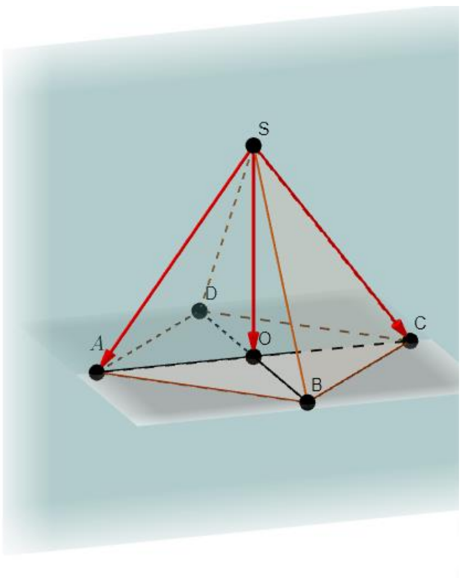
On dit alors que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exemple

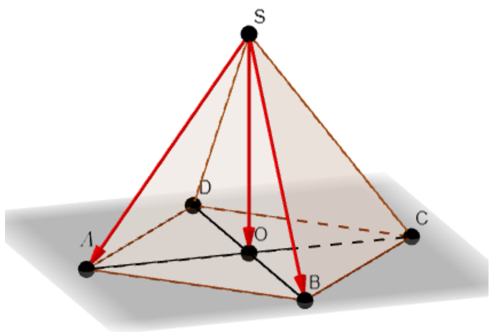
Dans la pyramide régulière à base carrée ci-contre, on a l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{SO}$, $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SC}$ sont donc coplanaires.



On remarque que $\overrightarrow{SO}$, $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SB}$ ne sont pas coplanaires.



Définitions

On dit que **des points sont coplanaires** s'il existe un plan qui contient ces points.

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace.

Le **plan** (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des **vecteurs directeurs du plan** (ABC).

Le couple $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est **une base** de ce plan.

Le triplet $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est **un repère** de ce plan.

Remarques

Trois points sont toujours coplanaires.

Un point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (ou trois points non alignés) suffisent à déterminer un plan : c'est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Par exemple, dans la pyramide précédente, le point S et les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SB}$ suffisent à déterminer le plan (SAB).

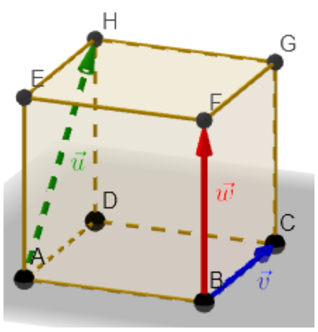
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SB}$ dirigent le plan (SAB).

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

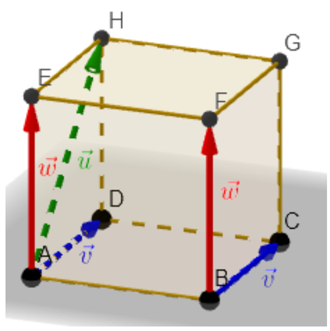
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si les points A, B, C et D sont coplanaires.

Exemple



$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

- On cherche des représentants à partir d'un même point.
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ont en particulier pour représentants $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
- Or les **points A, D, H et E sont coplanaires**, donc $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires



$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ **sont coplanaires**.

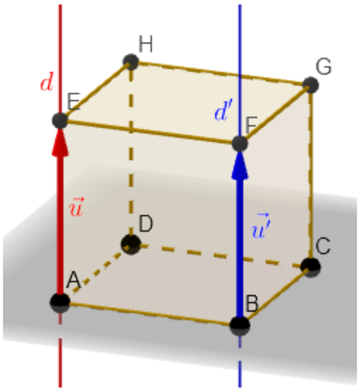
3 Positions relatives de droites et de plans

3.1 Positions relatives de deux droites

Définitions

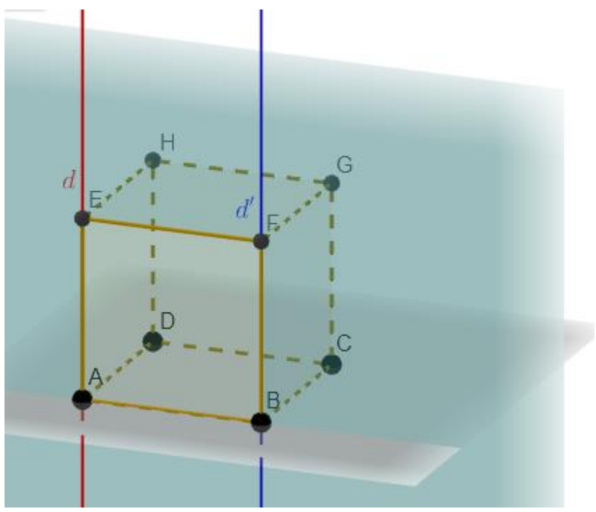
Soient d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et d' une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$.

- d et d' sont **parallèles** lorsque $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires.

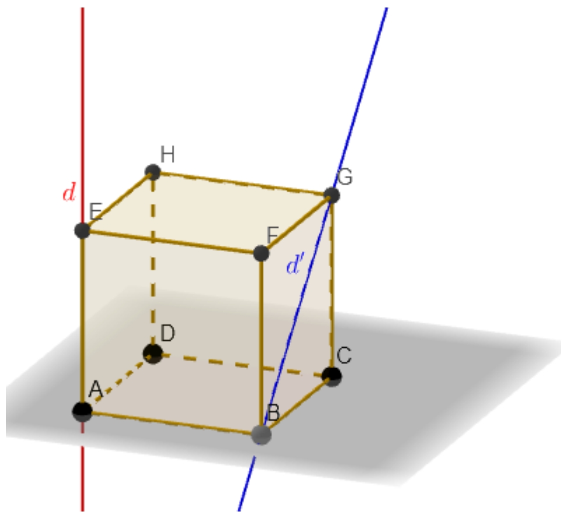


d et d' sont **parallèles**

- d et d' sont **coplanaires** lorsqu'il existe un plan contenant d et d'.
- d et d' sont **non coplanaires** lorsqu'il n'existe aucun plan contenant d et d'.



d et d' sont **coplanaires**



d et d' sont **non coplanaires**

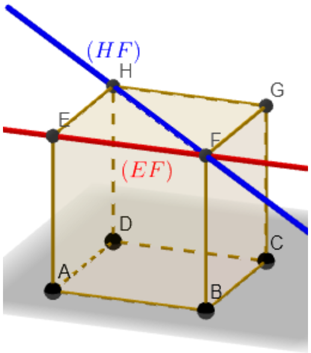
Propriétés

Soient A, B, C et D quatre points distincts de l'espace. Les droites (AB) et (CD) sont coplanaires équivaut à A, B, C, D sont coplanaires.

Par exemple, sur la figure du cube ci-dessus, le plan gris contient A, B, C, D, donc (AB) et (CD) sont coplanaires.

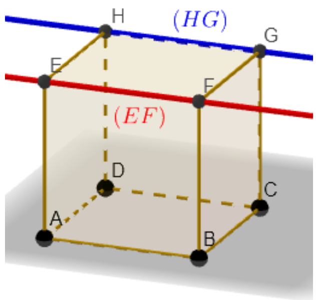
Deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes ou parallèles.

$(EF) \cap (HF) = \{F\}$



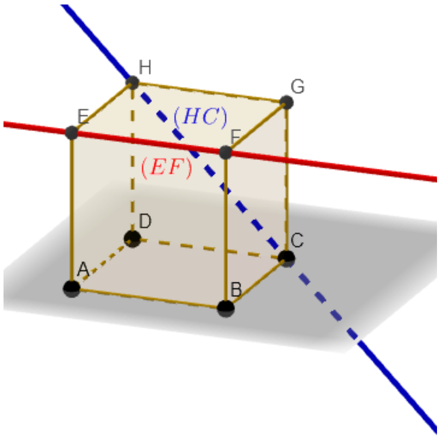
Les droites (EF) et (HF) sont séantes en F
donc (EF) et (HF) sont coplanaires

Dans le cube $ABCDEFGH$, les côtés du carré $EFGH$ sont parallèles, donc $(EF)//(HG)$



Les droites (EF) et (HG) sont parallèles donc
(EF) et (HG) sont coplanaires

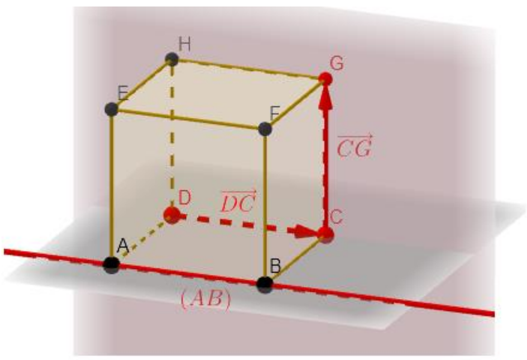
Si deux droites sont non coplanaires alors leur intersection est vide.



(EF) et (HC) sont non coplanaires

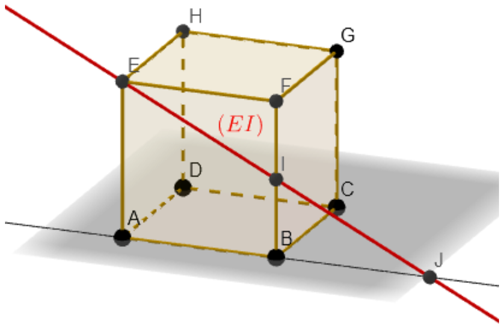
3.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Une droite est **parallèle à un plan** lorsqu'elle a un vecteur directeur colinéaire à un vecteur directeur de ce plan.



La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$
Le plan (DCG) a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CG}$
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires donc(AB) est parallèle au plan (DCG)

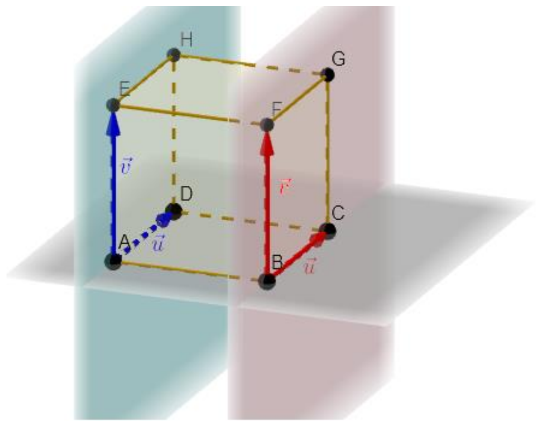
Si une droite **n'est pas parallèle à un plan** alors on dit qu'elle est sécante avec ce plan en un point.



La droite (EJ) est **sécante avec le plan** (ABC) au point J

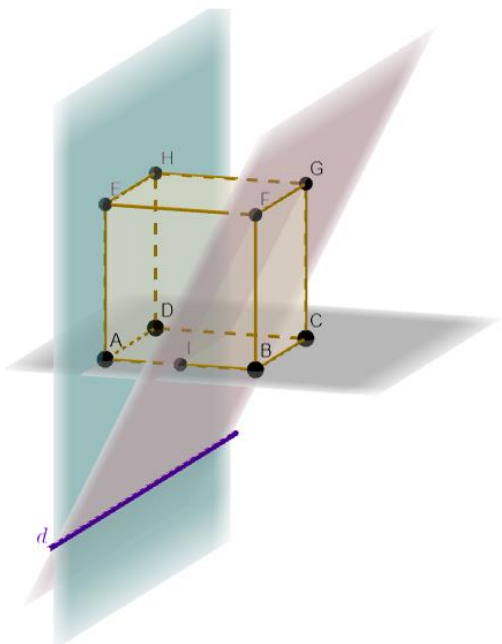
3.3 Positions relatives de deux plans

Deux plans sont parallèles lorsqu'ils ont un même couple de vecteurs directeurs.



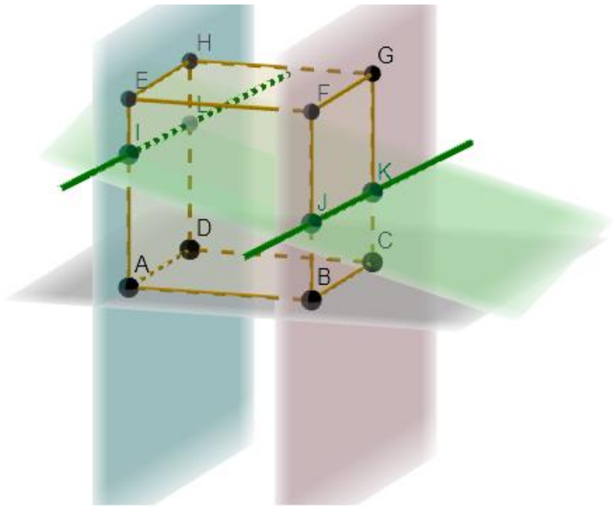
(ADH) et (BCG) ont **en commun le couple de vecteurs directeurs** $(\vec{u}, \vec{v})$. Donc $(ADH)//(BCG)$

Deux plans non parallèles sont sécants suivant une droite.



(ADH) et (IFG) **ne sont pas parallèles donc ils sont sécants** suivant une droite d.

Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.



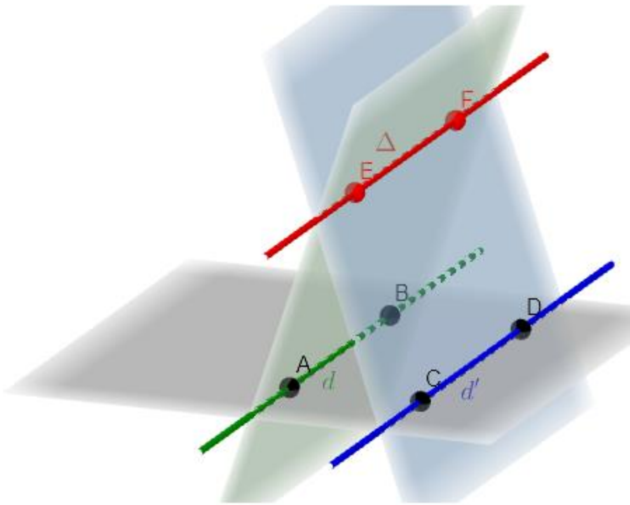
(ADH) et (BCG) **sont parallèles**
(IJK) coupe (ADH).
Donc (IJK) coupe (BCG).
Et **les droites d'intersection** (IL) et (JK)**sont parallèles**

Théorème du toit

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans.

Soient d une droite incluse dans $\mathcal{P}$ et d' une droite incluse dans $\mathcal{P}'$ telles que $d\ //\ d'$.

Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants selon une droite Δ, alors $\Delta\ //\ d\ //\ d'$.



- La droite (AB) est incluse dans le plan (ABF).
- La droite (CD) est incluse dans le plan (CDF).
- Les plans (ABF) et (CDF) sont sécants.

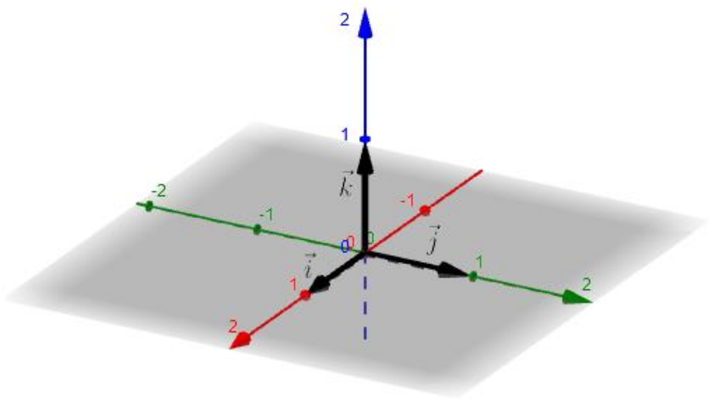
Donc **d'après le théorème du toit**, leur droite d'intersection Δ est parallèle à (AB) et (CD).

4 Repères de l'espace

4.1 Base de l'espace

Définition

Une base de l'espace est formée d'un triplet de vecteurs $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ non coplanaires.



Exemple de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

- Les vecteurs d'une base sont tous non nuls et non colinéaires deux à deux.

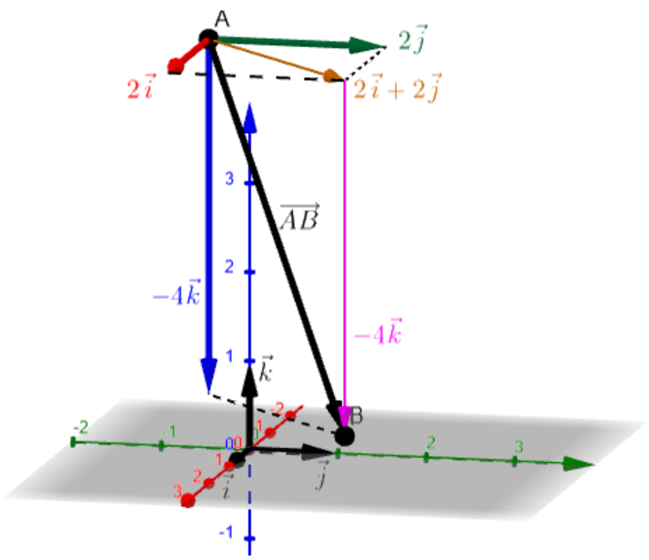
Propriété et définition

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de l'espace.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ de réels tel que

$$\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$$

$(x\,;y\,;z)$ sont **les coordonnées du vecteur** $\vec{u}$ dans cette base. On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.



Si dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, on a $\overrightarrow{AB}(\mathbf{2}\,;\mathbf{2}\,;\mathbf{-4})$, alors on peut écrire

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{2}\,\vec{\imath} + \mathbf{2}\,\vec{\jmath} - \mathbf{4}\,\vec{k}$$

4.2 Repère de l'espace

Définition

Un repère de l'espace est formé d'un point donné O et d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On note $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un tel repère.

O est l'origine du repère. Ses coordonnées sont $O(0\,;0\,;0)$.

Remarque

En changeant l'ordre des vecteurs, on change le repère.

Propriété et définition

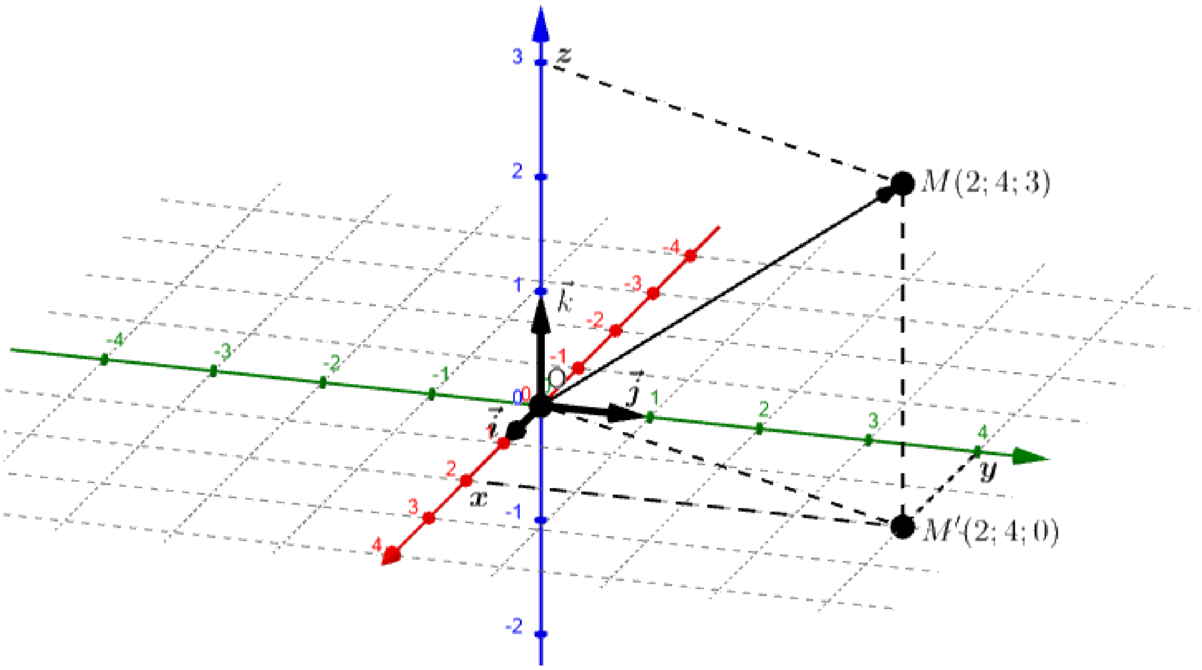
Soit $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ de réels tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$$

$(x\,;y\,;z)$ sont **les coordonnées du point** M dans ce repère. On note $M(x\,;y\,;z)$.

x est l'**abscisse** de M dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, y est l'**ordonnée** et z est la **cote**.



On représente l'axe (Ox) venant vers nous, l'axe (Oy) vers la droite et l'axe (Oz) vers le haut.
On a placé dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le point $\boldsymbol{M(2\,;4\,;3)}$
Pour mieux voir, on peut placer M' de mêmes coordonnées que M, mais avec une cote nulle.

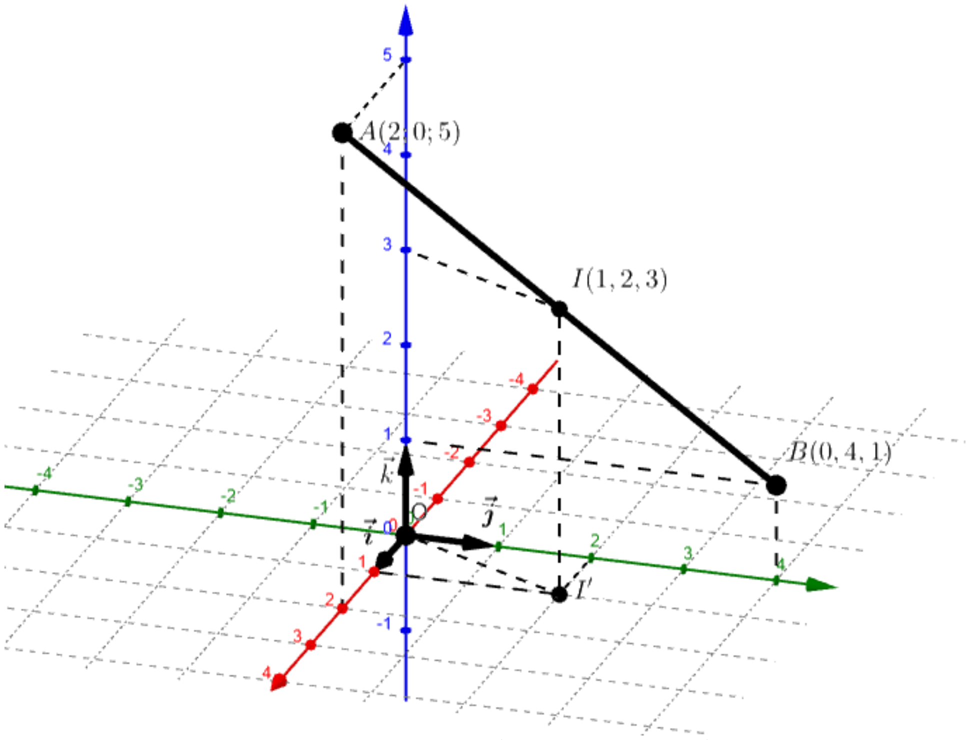
Propriétés

Soit $\left(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ un repère de l'espace.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs, k un réel.

Soient les points $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$.

Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_B}{2}\ ;\ \frac{z_A+z_B}{2}\right)$



Si $A(2\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et $B(0\ ;\ 4\ ;\ 1)$ alors $I\left(\frac{2+0}{2}\ ;\ \frac{0+4}{2}\ ;\ \frac{5+1}{2}\right)$ d'où $\boldsymbol{I(1\ ;\ 2\ ;\ 3)}$

Dans la base $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$ $\quad k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$ $\quad$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$

Avec l'exemple précédent : $A(2\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et $B(0\ ;\ 4\ ;\ 1)$ on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-2\\4-0\\1-5\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}$

Dans la base $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, $\vec{u}$ et sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles

Puisque $A(2\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et $I(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ on a $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1-2\\2-0\\3-5\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$. De plus, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AI}$ sont proportionnelles. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires.

5 Produit scalaire dans l'espace

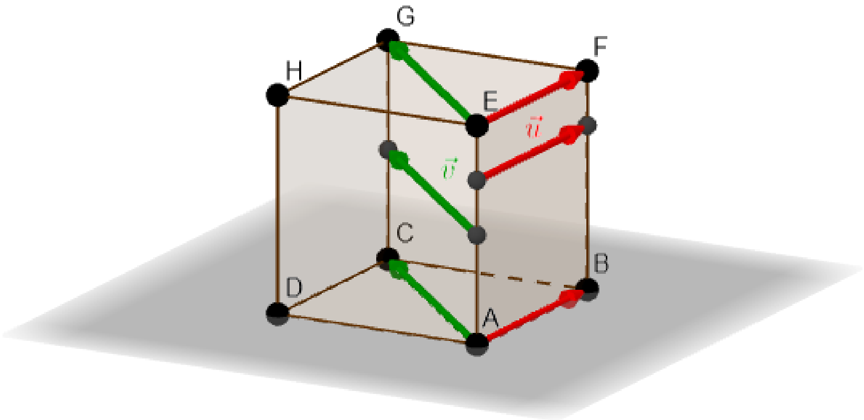
5.1 Extension du produit scalaire à l'espace

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient les points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Les points A, B et C étant coplanaires, le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui est noté $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v}}$ est le réel $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ calculé dans un plan contenant les points A, B, C.

$\vec{u}.\vec{v}$ ne dépend pas des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ choisis.



Sur l'exemple ci-dessus, si on veut calculer le produit scalaire $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v}}$ **alors** on pourra calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
Mais on peut prendre d'autres représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Par exemple on peut calculer $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}$.

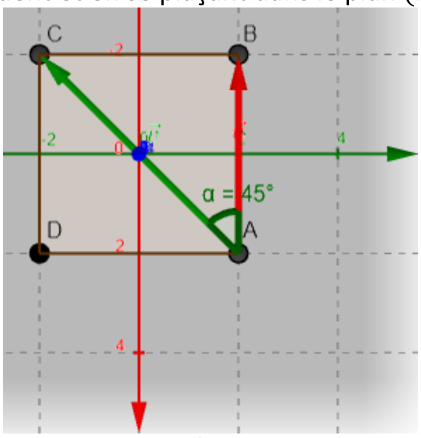
Propriétés

Soient A, B et C trois points de l'espace, B et C étant distincts de A.

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

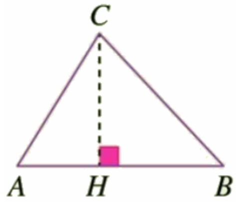
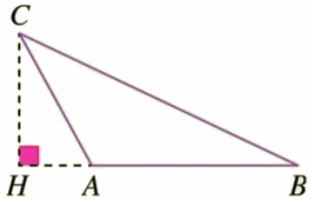
En reprenant le cube précédent et en se plaçant dans le plan (ABC) on peut calculer $\vec{u}.\vec{v}$:



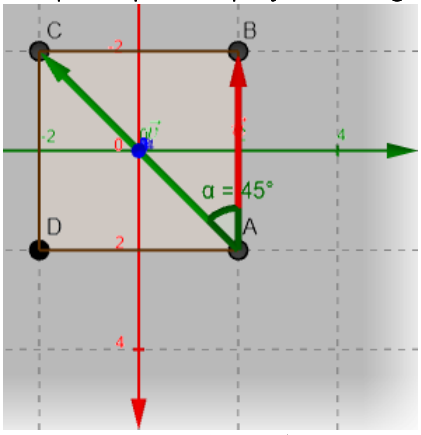
$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$$
$$\vec{u}.\vec{v} = 4 \times 4\sqrt{2} \times \cos(45°) = \mathbf{16}$$

On peut aussi projeter un vecteur sur la direction de l'autre.

Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

1[er] cas : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens	2[e] cas : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires
	
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

On peut calculer $\vec{u}.\vec{v}$ en remarquant que B le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



On est dans le 1[er] cas : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens.
Donc

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AB = 4 \times 4 = \mathbf{16}$$

Remarque

En particulier, $\vec{u}.\vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$ et est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$.

$$\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$$

Dans l'exemple précédent, on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB \times AB = 4^2 = \mathbf{16}$

5.2 Propriétés algébriques du produit scalaire

Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan sont conservées dans l'espace.

Propriétés

Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et soit k un nombre réel. On a :

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (propriété de **symétrie**)

$\vec{u}\,.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\vec{v} + \vec{u}\,.\vec{w}$ et $\vec{u}\,.(k\vec{v}) = (k\vec{u})\,.\vec{v} = k(\vec{u}\,.\,\vec{v})$ (propriété de **bilinéarité**)

Exemples :

En appliquant la propriété de symétrie on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}$$

En appliquant la propriété de bilinéarité, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}.-\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$$

Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On a :

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ donc $\|\boldsymbol{\vec{u}}+\boldsymbol{\vec{v}}\|^2 = \|\boldsymbol{\vec{u}}\|^2 + \boldsymbol{2\vec{u}.\vec{v}} + \|\boldsymbol{\vec{v}}\|^2$

$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ donc $\|\boldsymbol{\vec{u}}-\boldsymbol{\vec{v}}\|^2 = \|\boldsymbol{\vec{u}}\|^2 - \boldsymbol{2\vec{u}.\vec{v}} + \|\boldsymbol{\vec{v}}\|^2$

$(\boldsymbol{\vec{u}}+\boldsymbol{\vec{v}}).(\boldsymbol{\vec{u}}-\boldsymbol{\vec{v}}) = \|\boldsymbol{\vec{u}}\|^2 - \|\boldsymbol{\vec{v}}\|^2$.

Corollaires (formules de polarisation) On déduit des formules précédentes :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$

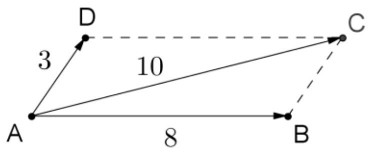
$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2]$$

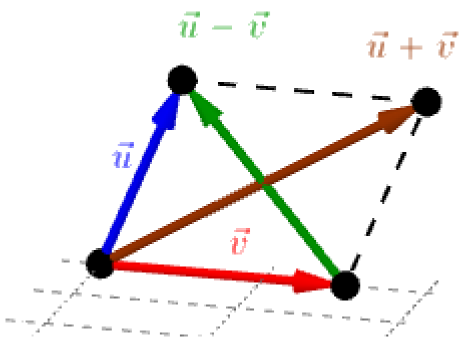
$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2]$$

Ces formules permettent de calculer le produit scalaire de deux vecteurs lorsqu'on connait **la norme des vecteurs** et **la norme de leur somme ou de leur différence**.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(10^2 - 8^2 - 3^2) = \frac{27}{2}$$





Lien entre les diagonales d'un parallélogramme et la somme ou la différence de deux vecteurs

5.3 Orthogonalité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux lorsque** $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = 0}$

Remarque

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, on a $\vec{u}.\vec{0} = \vec{0}.\vec{u} = 0$.

Ainsi le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace.

6 Orthogonalité dans l'espace

6.1 Orthogonalité de deux droites

Définition

Soient d et d' deux droites de l'espace.

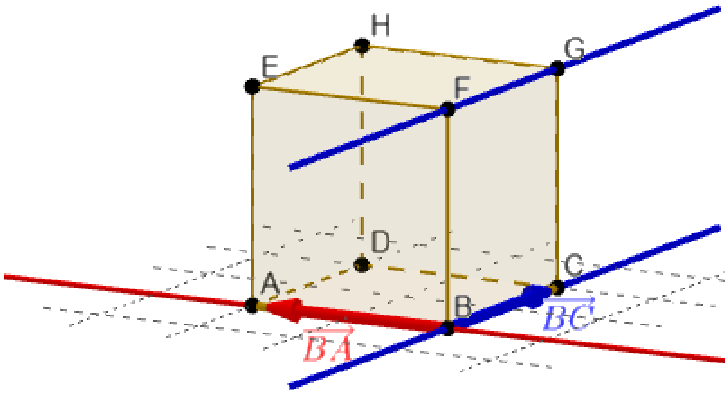
d et d' sont orthogonales si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

Propriété

Deux droites d et d' de l'espace sont orthogonales si et seulement si tout vecteur directeur de d est orthogonal à tout vecteur directeur de d'.

Remarques

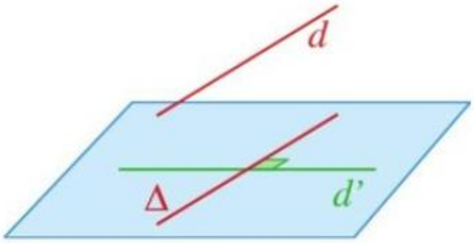
- Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires.
- Dans l'espace, deux droites sont perpendiculaires si et seulement si elles sont sécantes selon un angle droit (c'est un cas particulier d'orthogonalité).
- Si deux droites sont perpendiculaires, alors elles sont orthogonales. La réciproque est fausse.



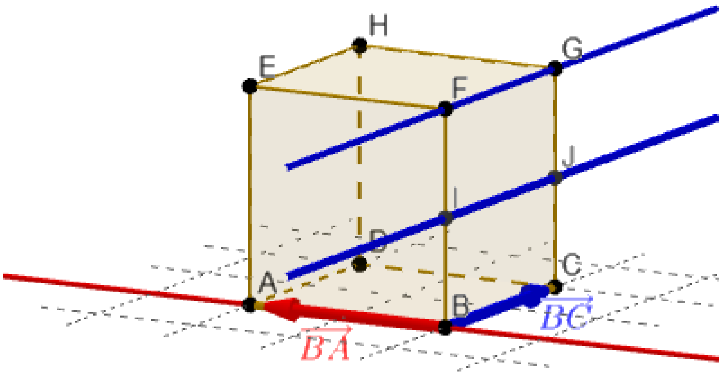
Les droites $(\boldsymbol{BA})$ **et** $(\boldsymbol{FG})$ sont orthogonales, mais **ne sont pas coplanaires**.
Les droites (BA) et (BC) sont orthogonales et sont coplanaires.
Les droites (BA) et (BC) sont perpendiculaires.
Les droites $(\boldsymbol{BA})$ **et** $(\boldsymbol{FG})$ sont orthogonales, mais **ne sont pas perpendiculaires**.

Propriétés

- Deux droites d et d' de l'espace sont orthogonales si et seulement s'il existe une droite Δ parallèle à d et perpendiculaire d'.

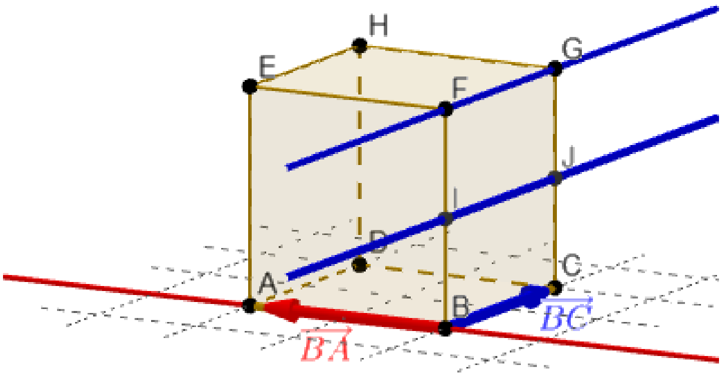


- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.



(FG) et (IJ) sont parallèles.
Alors toute droite orthogonale à (FG) est orthogonale à (IJ). C'est le cas de la droite (BA).

- Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

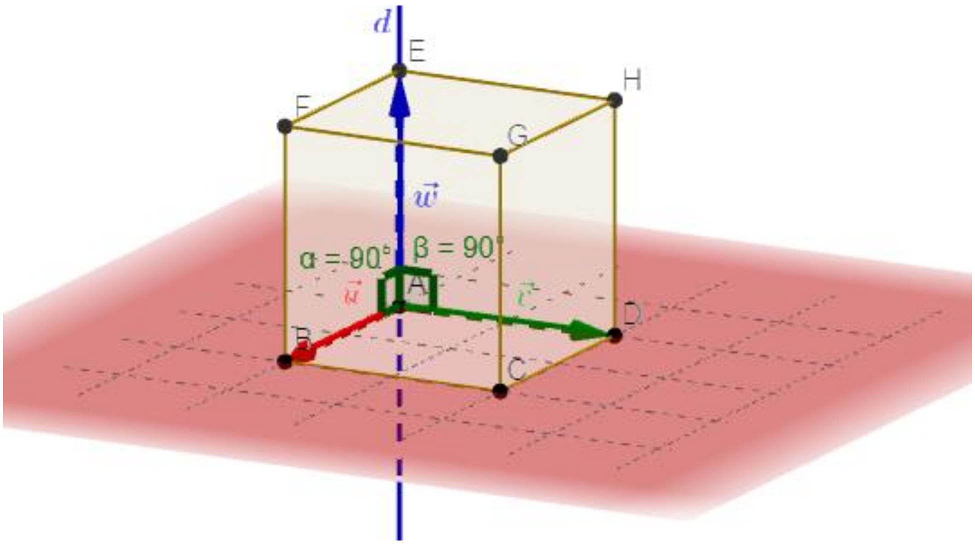


(BA) et (FG) sont orthogonales.
Alors toute droite parallèle à (FG) est orthogonale à (BA). C'est le cas de la droite (IJ).

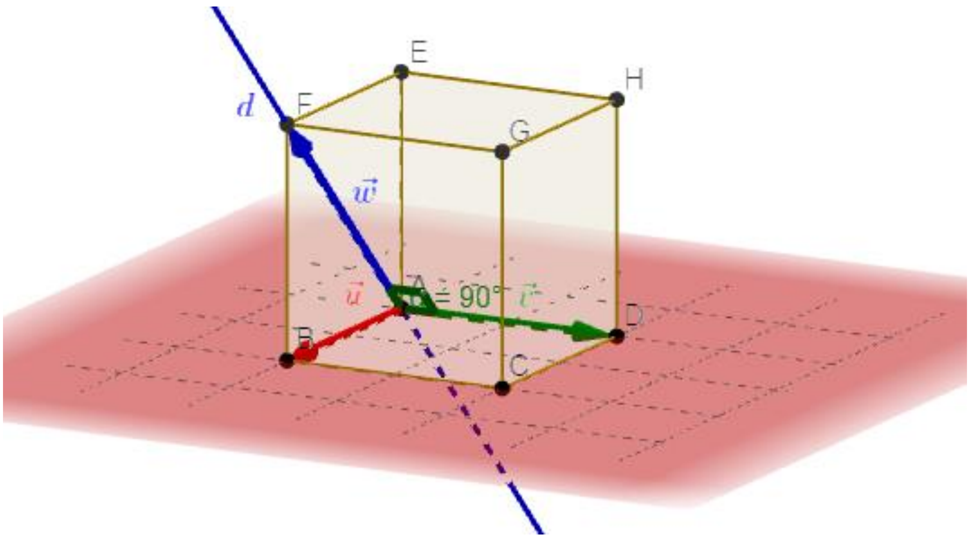
6.2 Orthogonalité d'un plan et d'une droite

Définition

Dans l'espace, soit $\mathcal{P}$ un plan de base $(\vec{u}\,;\vec{v})$ et d une droite de vecteur directeur $\vec{w}$. La droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont orthogonaux (ou perpendiculaires) si $\vec{w}$ est **orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$**.

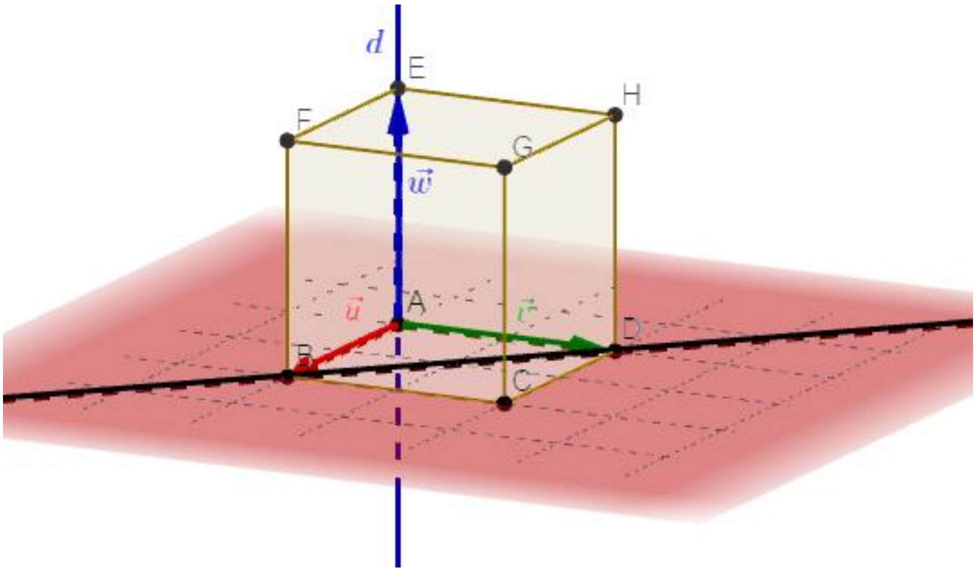


$\vec{w}$ est un vecteur directeur de (AE)
$(\vec{u}\,;\vec{v})$ est une base de (ABC)
$\vec{w}$ est **orthogonal à la fois aux deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$**
Donc (AE) est perpendiculaire à (ABC).



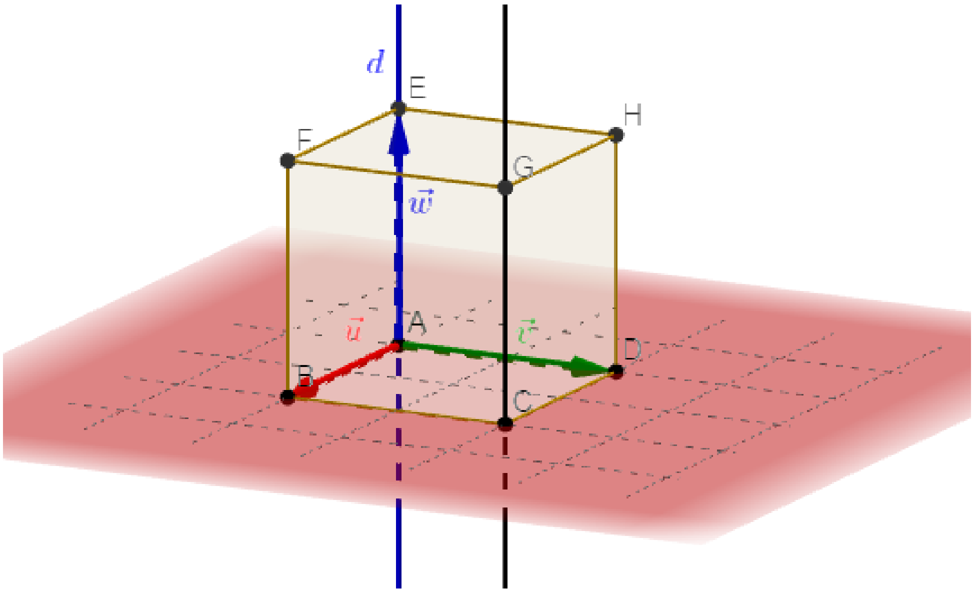
$\vec{w}$ est un vecteur directeur de (AF)
$(\vec{u}\,;\vec{v})$ est une base de (ABC)
$\vec{w}$ est **orthogonal seulement à un seul vecteur $\vec{v}$**
Donc on ne peut pas en déduire que (AF) est perpendiculaire à (ABC).

Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.



(AE) est orthogonale à (ABC) et (BD) est incluse dans le plan (ABC).
Donc $(\boldsymbol{AE})$ **est orthogonale à** $(\boldsymbol{BD})$.

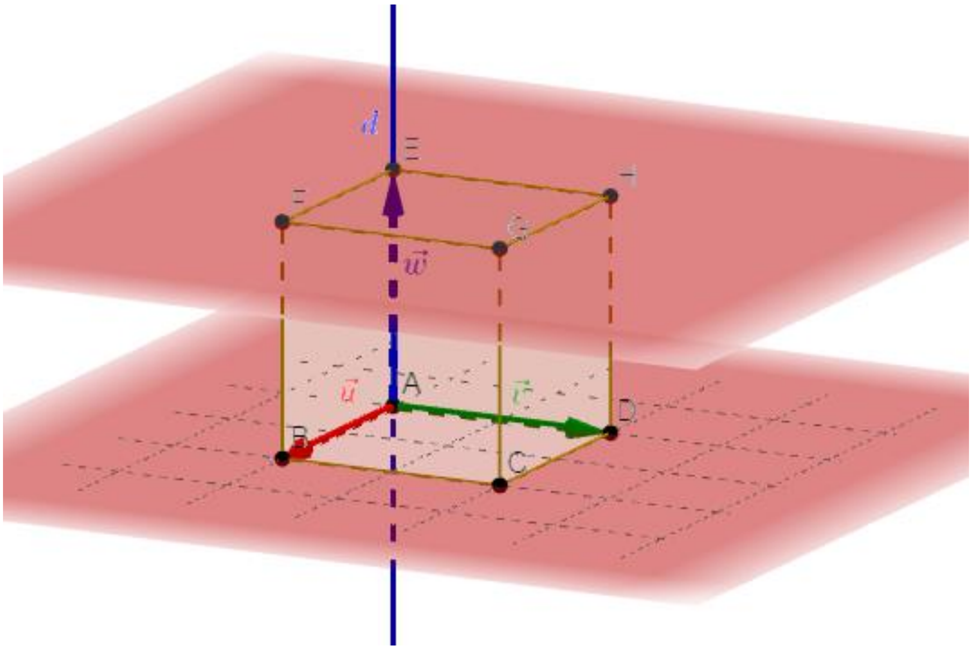
Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.



(CG) est parallèle à (AE) et (AE) est orthogonale à (ABC).
Donc $(\boldsymbol{ABC})$ **est orthogonal à** $(\boldsymbol{CG})$**.**

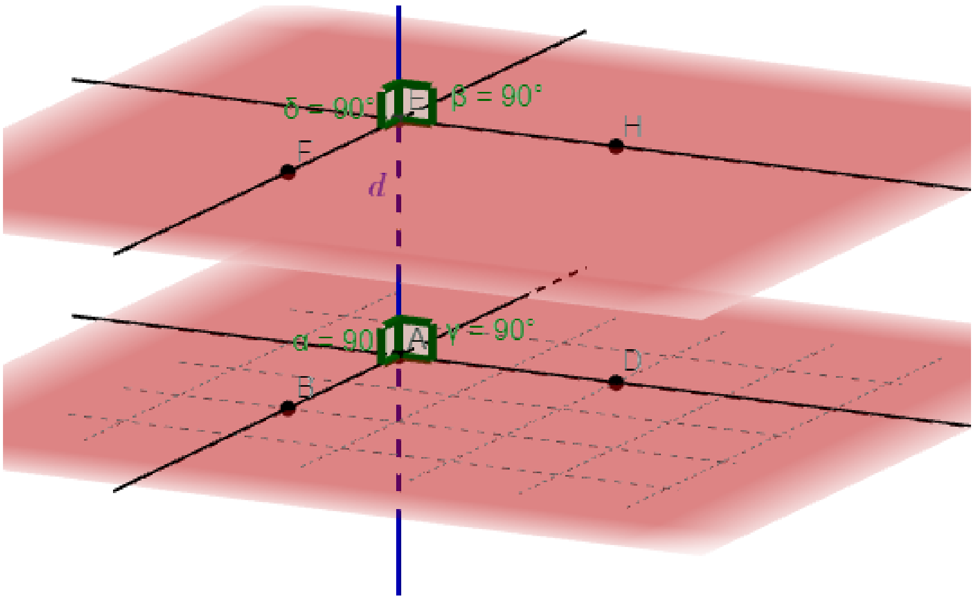
Propriétés

Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.



(ABC) est parallèle à (FGH) et (AE) est orthogonale à (ABC).
Donc $(\boldsymbol{AE})$ **est orthogonale à** $(\boldsymbol{FGH})$**.**

Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles entre eux.



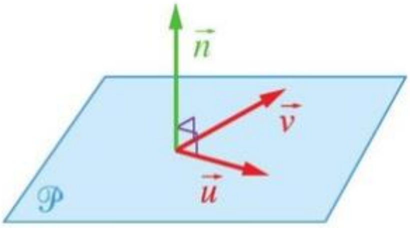
(ABD) est orthogonal à d et (EFH) est orthogonal à d. Donc $(\boldsymbol{ABD})$ **et** $(\boldsymbol{EFH})$ **sont parallèles**.

7 Vecteur normal, projeté orthogonal

7.1 Vecteur normal à un plan

Définition

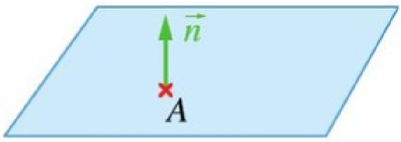
Soit $\mathcal{P}$ un plan de base $(\vec{u},\ \vec{v})$. Un vecteur $\vec{n}$ est **normal** à $\mathcal{P}$ s'il est non nul et orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.



Propriété

Soient A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

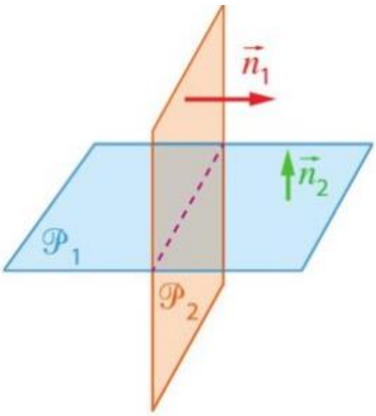
Il existe **un unique plan** passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$



Définition

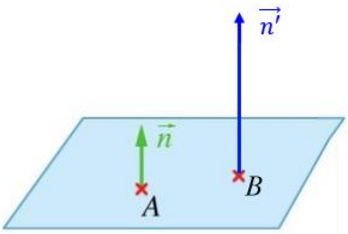
Soient $\mathcal{P}_1$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$ et $\mathcal{P}_2$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$.

$\mathcal{P}_1$ est **perpendiculaire** à $\mathcal{P}_2$ si $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n_2}$.



Remarques

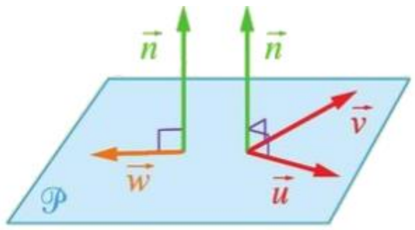
Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur normal à un plan est **aussi un vecteur normal** à ce plan.



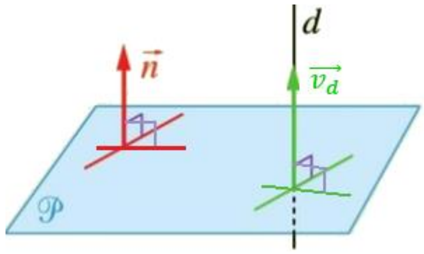
Si deux vecteurs sont normaux à un même plan, alors ils sont **colinéaires entre eux**.

Propriétés

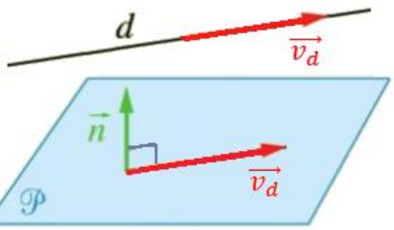
Un vecteur est normal à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement s'il est normal à tout vecteur directeur de $\mathcal{P}$.



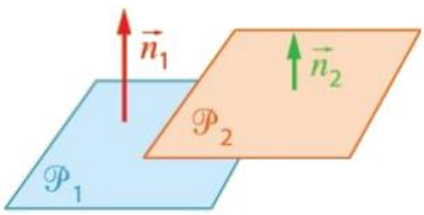
Une droite est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est colinéaire à un vecteur normal à ce plan.



Une droite est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à un vecteur normal à ce plan.



Soient $\mathcal{P}_1$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$ et $\mathcal{P}_2$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$.
$\boldsymbol{\mathcal{P}_1}$ **et** $\boldsymbol{\mathcal{P}_2}$ **sont parallèles** si et seulement si $\boldsymbol{\overrightarrow{n_1}}$ **et** $\boldsymbol{\overrightarrow{n_2}}$ **sont colinéaires**.



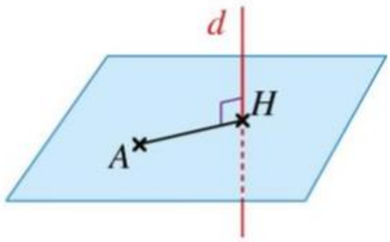
7.2 Projeté orthogonal d'un point

7.2.1 Projection d'un point sur une droite

Soient A un point de l'espace et d une droite.

Il existe un unique **plan passant par A et orthogonal à d**.

Le plan et la droite d sont sécants en un point H appelé le **projeté orthogonal de A sur la droite d**

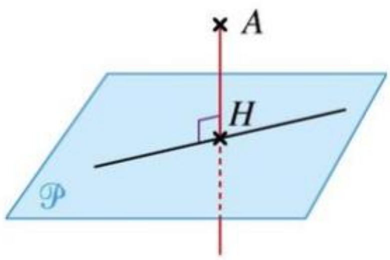


7.2.2 Projection d'un point sur un plan

Soient A un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan.

Il existe une unique **droite passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}$**.

Le plan $\mathcal{P}$ et la droite sont sécants en un point H appelé le **projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$**



8 Calculs de distances dans l'espace

8.1 Calculs dans une base orthonormée ; Calculs dans un repère orthonormé

Définition

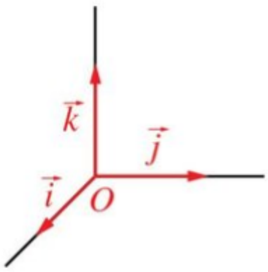
Une base orthonormée de l'espace est une base de l'espace telle que ses trois vecteurs soient orthogonaux deux à deux et tous de norme 1.

Autrement dit, $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une **base orthonormée** signifie que :

$\vec{\imath} \,.\, \vec{\jmath} = 0$, $\quad \vec{\imath} \,.\, \vec{k} = 0$, $\quad \vec{\jmath} \,.\, \vec{k} = 0 \quad$ et $\| \vec{\imath} \| = \| \vec{\jmath} \| = \| \vec{k} \| = 1$

Définition

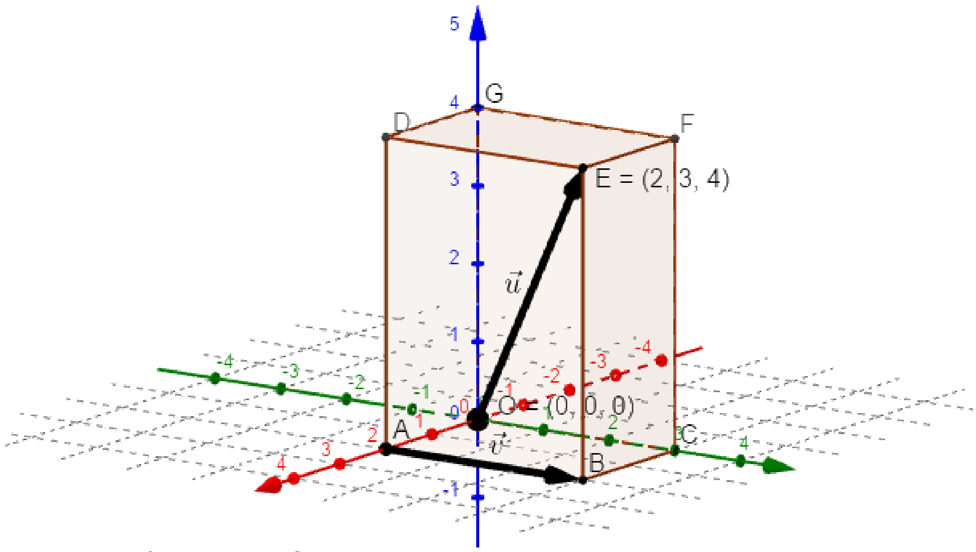
Un **repère orthonormé** $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un repère tel que la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormé.



Propriété

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

On a alors $\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\| \vec{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

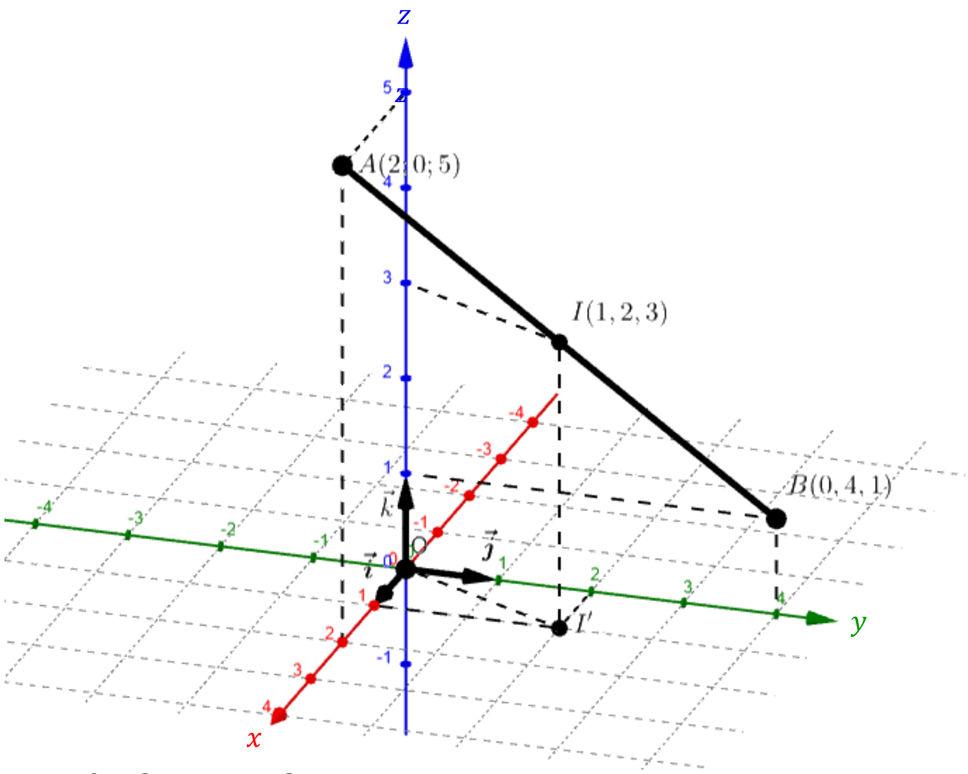


$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OE}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{OE} = (0)(2) + (3)(3) + (0)(4) = \mathbf{9}$$

$$\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ donc } \| \overrightarrow{OE} \| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{\mathbf{29}} \approx 5{,}385$$

Corollaire

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$. Puisque $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ alors $\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$



$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-2\\4-0\\1-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}$ donc la distance $AB = \sqrt{(-2)^2+(4)^2+(-4)^2} = \mathbf{6}$

8.2 Propriétés

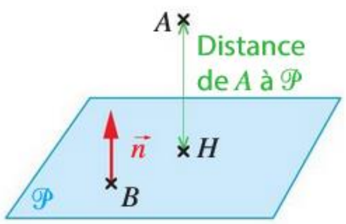
8.2.1 Distance d'un point à un plan

Soient A un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan passant par un point B et de vecteur normal $\vec{n}$.

Le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$ est noté H. C'est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A.

La distance AH est appelée **distance du point A au plan $\mathcal{P}$** et on a :

$$\boldsymbol{AH} = \frac{|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\,.\,\vec{\boldsymbol{n}}|}{\|\vec{\boldsymbol{n}}\|}$$



Rappel : la droite (AH) est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$

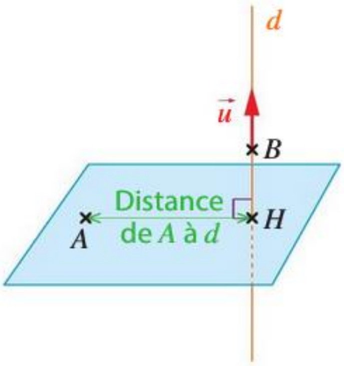
8.2.2 Distance d'un point à une droite

Soient A un point de l'espace et d une droite passant par un point B et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Le projeté orthogonal de A sur la droite d est noté H. C'est le point de d le plus proche de A.

La distance AH est appelée **distance du point A à la droite d** et on a :

$$\boldsymbol{AH = \left\| \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB}\,.\,\vec{u}}{\| \vec{u} \|^2} \vec{u} \right\|}$$



Rappel : la droite (AH) est perpendiculaire à la droite d

9 Représentation paramétrique d'une droite

9.1 Caractérisation des points appartenant à une droite

Soient un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non nul de l'espace.

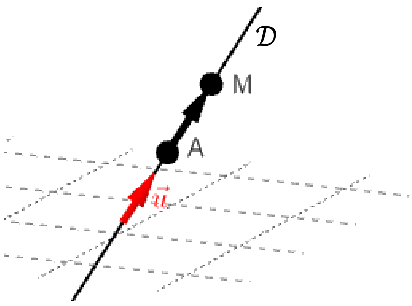
On considère la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et qui passe par A.

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l'espace.

Le point $\boldsymbol{M}$ **appartient à la droite $\mathcal{D}$** si et seulement **s'il existe un réel t tel que** $\boldsymbol{\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}}$

Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, ce qui se traduit en coordonnées :

$$\begin{cases} x = x_A + t\,a \\ y = y_A + t\,b \\ z = z_A + t\,c \end{cases}$$



9.2 Représentation paramétrique d'une droite

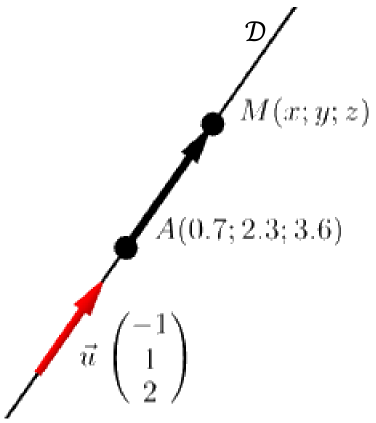
Propriété et définition

Soient α, β et γ trois réels.

L'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x; y\,; z)$ vérifient le système d'équations paramétriques

$\begin{cases} \boldsymbol{x = \alpha + t\,a} \\ \boldsymbol{y = \beta + t\,b} \\ \boldsymbol{z = \gamma + t\,c} \end{cases}$, où t décrit l'ensemble des réels, est la droite $\mathcal{D}$ qui passe par le point $A(\alpha\,;\ \beta\,;\ \gamma)$ et qui est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Ce système est **une représentation paramétrique** de la droite $\mathcal{D}$.



$\mathcal{D}$ a comme représentation paramétrique $\begin{cases} x = 0{,}7 - t \\ y = 2{,}3 + t \\ z = 3{,}6 + 2t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

Remarques

- Une droite peut être définie par la donnée d'une représentation paramétrique.
- Chaque valeur de t permet de déterminer les coordonnées d'un point de la droite. Réciproquement, à chaque point de la droite correspond une valeur de t
- Une droite admet une infinité de représentations paramétriques : en prenant un autre vecteur directeur ou un autre point de cette droite, on obtient une nouvelle représentation paramétrique.

Exemple

Dans l'exemple si on choisit $t = 0$ alors on obtient $\begin{cases} x = 0{,}7 - 0 = 0{,}7 \\ y = 2{,}3 + 0 = 2{,}3 \\ z = 3{,}6 + 2(0) = 3{,}6 \end{cases}$ c'est-à-dire le point A

Si on choisit $t = 1$, on a $\begin{cases} x = 0{,}7 - 1 = -0{,}3 \\ y = 2{,}3 + 1 = 3{,}3 \\ z = 3{,}6 + 2(1) = 5{,}6 \end{cases}$ Le point de coordonnées $(-0{,}3\,; 3{,}3\,; 5{,}6)$ est sur $\mathcal{D}$.

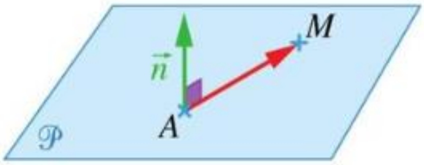
10 Equation cartésienne d'un plan dans l'espace

10.1 Caractérisation des points appartenant à un plan par le produit scalaire

Propriété

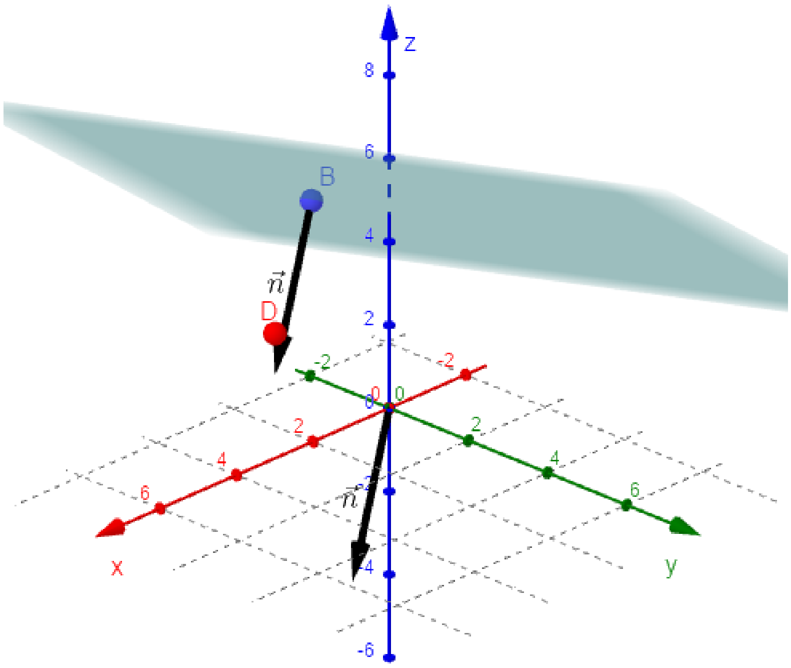
Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Soient A un point de $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Un point M de l'espace appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n} = 0$$



- Un plan peut être défini par la donnée d'un point du plan et d'un vecteur normal à ce plan.

Exemple



Soit $\mathcal{P}$ le plan qui passe par $B(1\,;\,-1\,;5)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$. $D(3\,;\;0\,;\;3)$ est-il sur $\mathcal{P}$?

Réponse : $D(3\,;\;0\,;\;3) \in \mathcal{P}$ équivaut à $\overrightarrow{BD}\,.\,\vec{n} = 0$.

On calcule $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}3-1\\0-(-1)\\3-\;5\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BD}\,.\,\vec{n} = (2)(2) + (1)(1) + (-2)(-3)$ $\overrightarrow{BD}\,.\,\vec{n} = 4 + 1 + 6 = \mathbf{11}$

$\overrightarrow{BD}\,.\,\vec{n} \neq 0$ donc le point $\boldsymbol{D}$ **n'appartient pas au plan** $\boldsymbol{\mathcal{P}}$.

10.2 Equation cartésienne d'un plan

Propriétés et définition

Soit $\mathcal{P}$ un plan passant le point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Le plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient l'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Pour calculer d, il suffit de remplacer x, y et z dans l'équation par les coordonnées de A.

Cette équation est une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

Remarque

Un plan admet une infinité d'équations cartésiennes : en choisissant un autre vecteur normal ou un autre point du plan, on obtient une nouvelle équation cartésienne.

Propriété

Soit d un réel.

L'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exemple

L'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $3x - 2y + 4z + 1 = 0$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Il passe par le point $A(0\,;0;\,-\frac{1}{4})$. (On a choisi ces coordonnées telles qu'elles vérifient l'équation).

Remarque

Un plan peut être défini par la donnée d'une de ses équations cartésiennes.