CHAPITRE 6 : Primitives et équations différentielles

[1 Équation différentielle *y’ = f* 2](#_Toc158089744)

[1.1 Activité de découverte 2](#_Toc158089745)

[1.2 Définition de l’équation différentielle *y’ = f* 2](#_Toc158089746)

[1.3 Vérifier qu’une fonction est solution d’une équation différentielle 2](#_Toc158089747)

[2 Primitive d’une fonction 3](#_Toc158089748)

[2.1 Activité 3](#_Toc158089749)

[2.2 Définition 3](#_Toc158089750)

[2.3 Lien avec l’équation différentielle *y’ = f* 4](#_Toc158089751)

[2.4 Propriétés 4](#_Toc158089752)

[3 Primitives des fonctions de référence et opérations 4](#_Toc158089753)

[4 Primitives de fonctions composées 6](#_Toc158089754)

[5 Ensemble des solutions d’une équation différentielle *y’ = ay*, solution avec condition initiale 7](#_Toc158089755)

[5.1 Activité 7](#_Toc158089756)

[5.2 Théorème 7](#_Toc158089757)

[5.3 Démonstration du théorème 8](#_Toc158089758)

[5.4 Allure des courbes des fonctions d’expression *Keax* 8](#_Toc158089759)

[5.5 Exemple théorique 8](#_Toc158089760)

[5.6 Exemple concret 9](#_Toc158089761)

[6 Ensemble des solutions d’une équation *y’ = ay + b*, solution avec condition initiale 9](#_Toc158089762)

[6.1 Activité 9](#_Toc158089763)

[6.2 Première propriété 10](#_Toc158089764)

[6.3 Deuxième propriété 10](#_Toc158089765)

CHAPITRE 6 : Primitives et équations différentielles

# Équation différentielle *y’ = f*

## Activité de découverte

1. Déterminer une fonction dérivable sur telle que

Autrement dit : Déterminer une fonction dérivable sur telle que

1. Déterminer une fonction dérivable sur telle que

Autrement dit : Déterminer une fonction solution de l’équation différentielle

## Définition de l’équation différentielle *y’ = f*

Soit une fonction continue sur un intervalle .

Une équation différentielle est une équation dont l’inconnue est une fonction.

On dit qu’une fonction est solution de l’équation différentielle sur lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

* est dérivable sur .
* .

Résoudre sur l’équation différentielle c’est déterminer toutes les fonctions dérivables sur telles que

## Vérifier qu’une fonction est solution d’une équation différentielle

Méthode :

Etape 1 : Dire que est dérivable sur l’intervalle considéré.

Etape 2 : Calculer la dérivée de et retrouver

***Exemple***

On considère l’équation différentielle où l’inconnue désigne une fonction dérivable sur .

Soit la fonction définie sur par . Vérifier que est solution de l’équation différentielle.

# Primitive d’une fonction

## Activité

Une image contenant texte, Police, blanc, conception

Description générée automatiquementOn cherche à déterminer une fonction dérivable sur et dont la dérivée est .

Un logiciel de calcul formel propose cette expression pour

Démontrer que la fonction a bien pour dérivée .

On dit alors que et une primitive de la fonction sur l’intervalle .

## Définition

Une primitive d’une fonction sur un intervalle est une fonction dérivable sur telle que .

Par définition, la recherche d’une primitive est l’opération inverse de la dérivation, ce qui permet de traiter les cas usuels par lecture inverse du tableau des dérivées.

***Exemple***

Donner une primitive sur le domaine pour chacune des fonctions suivantes :

## Lien avec l’équation différentielle *y’ = f*

Soit une fonction définie sur un intervalle .

On appelle primitive de la fonction sur toute fonction solution de l’équation différentielle .

Résoudre sur l’équation revient donc à déterminer toutes les primitives de sur .

***Exemple***

D’après l’étude précédente, on sait que la fonction définie sur par est solution de l’équation différentielle

En posant on peut affirmer que la fonction est une primitive de sur .

## Propriétés

* Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur .
* Si est une fonction continue sur un intervalle alors deux primitives de diffèrent d’une constante. Autrement dit, si est une primitive de sur l’intervalle alors toutes les primitives de sur sont les fonctions définies sur par où est une constante réelle.
* Quels que soient et , il existe une unique primitive de telle que

***Exemple***

1. Montrer que la fonction est une primitive de la fonction sur.
2. En déduire l’ensemble des primitives de la fonction sur
3. Déterminer la primitive de la fonction qui s’annule en .

# Primitives des fonctions de référence et opérations

On obtient le tableau des primitives par lecture inverse du tableau des dérivées des fonctions usuelles.

Rappel du tableau des dérivées des fonctions usuelles :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Fonction définie par | Fonction dérivée | Domaine de dérivabilité |
| (constante réelle) |  |  |
| (avec constante réelle) |  |  |
| ( |  | si  \* si |
|  |  | \* |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Tableau des primitives des fonctions de référence par lecture inversée du tableau des dérivées précédent :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Fonction | Une primitive | Sur : |
| (constante réelle) | *ax* |  |
| Méthode 1 : *nxn*-1  Méthode 2 :  avec *n* est un entier relatif différent de et | *xn* | si *n* > 0  \* si *n* < −1 |
|  |  | \* |
|  |  | ]0 ; + |
| *ex* | *ex* |  |
|  | *ln(x*) | ]0 ; + |
| *cos*(*x*) | *sin(x*) |  |
| *sin* (*x*) | −*cos*(*x*) |  |

Rappel des dérivées en lien avec les opérations sur les fonctions :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Fonction à dériver | Fonction dérivée |
| 1 |  |  |
| 2 | avec . |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |

# Primitives de fonctions composées

|  |  |
| --- | --- |
| Fonction à dériver | Fonction dérivée |
| *n* |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Fonction | Une primitive | Conditions |
| avec , et |  | Si , alors il faut que  pour tout de |
|  |  | pour tout de |
|  |  | pour tout de |
| *u’eu* |  |  |
|  |  | est dérivable sur un intervalle et pour tout de , appartient à |

# Ensemble des solutions d’une équation différentielle *y’ = ay*, solution avec condition initiale

## Activité

Partie 1 : Équation

1) Quelle fonction usuelle et non nulle est solution de l’équation ?

2) Si une fonction est solution de l’équation différentielle , la fonction où est un réel quelconque est-elle aussi solution de l’équation ?

Partie 2 : Équation

1) Vérifier que la fonction définie par est solution de l’équation . En déduire d’autres solutions de l’équation.

2) Proposer des solutions des équations .

3) Associer chaque fonction ci-dessous à sa courbe représentative et donner l’équation différentielle dont elle est solution. Que peut-on dire de l’allure des courbes des fonctions

selon le signe de et  ?

Une image contenant texte, capture d’écran, diagramme, ligne

Description générée automatiquement

## Théorème

Les équations différentielles de la forme où est un réel non nul ont pour solutions les fonctions définies sur par où est une constante réelle.

## Démonstration du théorème

Étape 1 : Vérifier que toute fonction d’expression est solution de l’équation différentielle .

Étape 2 : Réciproquement, il faut prouver que toute solution est de cette forme.

On considère la fonction qui est une solution de l’équation et la fonction définie par :

Montrer que pour tout réel et conclure.

## Allure des courbes des fonctions d’expression *Keax*

Une image contenant texte, capture d’écran, logiciel, Icône d’ordinateur

Description générée automatiquement

## Exemple théorique

1. Résoudre l’équation différentielle .
2. Donner l’allure des courbes solutions.
3. Déterminer l’unique solution f telle que .

## Exemple concret

Pendant le premier mois de croissance du cotonnier, la vitesse de croissance (en g/jour) est proportionnelle au poids du moment en jours. Le coefficient de proportionnalité est de 0,21.

1. Traduire l’énoncé par une équation différentielle.
2. Déterminer la forme de la fonction .
3. Évaluer le poids d’une plante de coton à la fin du mois (t = 30) si la plante pesait 70 mg au début du mois.

# Ensemble des solutions d’une équation *y’ = ay + b*, solution avec condition initiale

## Activité

1) Montrer que l’équation différentielle se ramène à l’équation différentielle :

2) Montrer qu’une fonction est solution de si et seulement si la fonction est solution de . Donner alors les solutions de l’équation différentielle (E).

3) On considère l’équation différentielle où et sont des réels non nuls. Quelles solutions peut-on donner à cette équation ?

## Première propriété

Soient et deux nombres réels non nuls. On considère l’équation différentielle : .

admet une unique solution particulière constante qui est la fonction .

Les solutions sur de sont les fonctions d’expressions où est une constante réelle.

Quels que soient les nombres réels et l’équation admet une unique solution vérifiant la condition initiale .

## Deuxième propriété

Soient un nombre réel et une fonction définie sur un intervalle .

Soient l’équation différentielle et une solution particulière de sur .

Les solutions de sur sont les fonctions où est une constante réelle.