CHAPITRE 7 : Combinatoire et dénombrement

[1 Principes additifs et multiplicatifs 2](#_Toc47281106)

[1.1 Ensemble fini et cardinal 2](#_Toc47281107)

[1.2 Principe additif 2](#_Toc47281108)

[1.3 Principe multiplicatif 3](#_Toc47281109)

[2 *k*-uplets d’un ensemble fini 4](#_Toc47281110)

[2.1 Nombre de *k*-uplets d’un ensemble à *n* éléments 4](#_Toc47281111)

[2.2 *k*-uplets d’éléments distincts d’un ensemble, permutations 4](#_Toc47281112)

[3 Parties d’un ensemble et combinaisons 6](#_Toc47281113)

[3.1 Nombre de parties d’un ensemble 6](#_Toc47281114)

[3.2 Combinaison 7](#_Toc47281115)

[4 Propriétés des combinaisons 9](#_Toc47281116)

[4.1 Propriétés 9](#_Toc47281117)

[4.2 Relation et triangle de Pascal 12](#_Toc47281118)

[4.3 Coefficients binomiaux 16](#_Toc47281119)

CHAPITRE 7 : Combinatoire et dénombrement

# Principes additifs et multiplicatifs

## Ensemble fini et cardinal

***Définition***

Soit un entier naturel. Lorsqu’un ensemble a éléments, on dit que est un **ensemble fini**.

Le nombre d’éléments de est appelé **cardinal de** . On le note .

***Exemple***

Sialors on a

***Remarques***

* Cas de l’ensemble vide :
* Certains ensembles ne sont pas finis : par exemple l’ensemble des entiers naturels, l’ensemble des réels de l’intervalle .

## Principe additif

***Propriété***

Soient ensembles finis, deux à deux disjoints. On a :



***Corollaire***

Soient une partie d’un ensemble fini et le complémentaire de dans .

On a :



## Principe multiplicatif

***Définition et propriété***

Soient et deux ensembles non vides.

**Le produit cartésien** de par , noté (lire «  croix  ») **est l’ensemble des couples** avec et .

Lorsque les ensembles et sont finis, .

***Remarque***

Le signe dans désigne le *produit cartésien des ensembles* et , alors que celui dans symbolise la multiplication de deux entiers.

***Exemple***

Soient et . Alors :

 et

.

***Définition et propriété***

Soient un entier supérieur ou égal à 2 et ensembles non vides.

* Toute liste ordonnée avec pour allant de à est appelée ***k*-uplet** (ou ***k*-liste).**
* L’ensemble de ces *k*-uplets est **le produit cartésien**
* Lorsque les ensembles sont finis :

***Remarques***

* Un 2-uplet est un couple et un 3-uplet est un triplet.
* Dans un *k*-uplet l’ordre compte. Par exemple les couples et sont *différents*.

***Exemple***

Soient , et

Le 3-uplet est un des éléments du produit cartésien .

# *k*-uplets d’un ensemble fini

## Nombre de *k*-uplets d’un ensemble à *n* éléments

***Définition***

Soit un entier naturel non nul et un ensemble non vide.

Un k-uplet (ou k-liste) d’éléments de est un élément du produit cartésien :

 ( facteurs)

***Exemple***

Si alors le 5-uplet est un des éléments du produit cartésien .

***Théorème***

Soient et deux entiers naturels non nuls et un ensemble fini de cardinal .

**Le nombre de *k*-uplets** du produit cartésien est , soit

***Exemple***

Soit un ensemble de trois tiroirs.

Un rangement de cinq jetons de couleurs différentes dans les tiroirs A, B, C peut être codé par un 5-uplet du produit cartésien . Par exemple le rangement « le 1er jeton est dans A, le 2e est dans B, le 3e est dans B, le 4e est dans A, le 5e est dans C » correspond au 5-uplet .

Donc si on veut calculer le nombre de rangements de 5 jetons différents dans 3 tiroirs, il suffit de calculer le cardinal de . Ici . Donc il y a rangements possibles.

## *k*-uplets d’éléments distincts d’un ensemble, permutations

***Théorème***

Soit un entier naturel non nul et un entier naturel tel que . Soit un ensemble fini de cardinal . **Le nombre de *k*-uplets d’éléments deux à deux distincts** de est :

 (dans ce produit il y a *k* facteurs)

***Exemple***

* Soit un ensemble de douze chevaux. On doit tiercéer sur l’ordre d’arrivée des trois premiers chevaux.
* Par exemple le 3-uplet signifie que le 1er est le cheval , le 2e est le cheval et le 3e est le cheval .
* Les tiercés tiennent compte de l’ordre ( et sont des tiercés différents )
* Il n’y a pas de répétition possible : n’est pas un tiercé.

Combien y a-t-il de tiercés possibles en tenant compte de l’ordre d’arrivée ?

*Réponse*:

* On a 12 possibilités pour le 1er, de 11 possibilités pour le 2e et de 10 possibilités pour le 3e.
* **Les tiercés en tenant compte de l’ordre sont les 3-uplets** d’éléments deux à deux distincts de l’ensemble .
* Leur nombre est .

***Définition***

On appelle **permutation** d’un ensemble à éléments tout *n*-uplet d’éléments deux à deux distincts de .

***Exemple***

Les permutations de l’ensemble sont :

***Théorème et définition***

**Le nombre de permutations** d’un ensemble à n éléments () est le nombre (qui se lit « factorielle n » ou « n factorielle ») défini par :

Dans l’exemple précédent, l’ensemble a 3 éléments.

Le nombre de permutations (ou nombre de « rangements » de ses éléments) est .

***Remarque***

On convient que

(Il n’y a qu’une façon de « ranger » l’ensemble vide puisqu’il ne contient aucun élément).

# Parties d’un ensemble et combinaisons

## Nombre de parties d’un ensemble

***Définition***

Soit un ensemble. Dire qu’un ensemble est une partie de (ou que est **un sous-ensemble** de , ou que est inclus dans ) signifie que tous les éléments de sont des éléments de . On note alors .

***Remarque***

Il ne faut pas confondre une partie d’un ensemble avec un *k*-uplet. Dans une partie (qu’on note entre accolades), l’ordre des éléments n’a pas d’importance. Par exemple et dont *identiques*.

***Exemple***

On considère l’ensemble . Les ensembles et sont des parties de .

***Théorème***

Soit un entier naturel. **Le nombre de parties d’un ensemble** incluses dans un ensemble à éléments est égal au nombre de n-uplets de l’ensemble c’est-à-dire .

Cela correspond au fait que pour constituer une partie d’un ensemble à éléments, on a choix successifs avec 2 possibilités : prendre ou ne pas prendre chaque élément de .

***Exemple***

On considère l’ensemble . Il y a parties de .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  ? |  ? |  ? |  ? | Partie de  | 4-uplets de l’ensemble  |
| oui | oui | oui | oui |  | (1 ;1 ;1 ;1) |
| oui | oui | oui | non |  | (1 ;1 ;1 ;0) |
| oui | oui | non | oui |  | (1 ;1 ;0 ;1) |
| oui | oui | non | non |  | (1 ;1 ;0 ;0) |
| oui | non | oui | oui |  | (1 ;0 ;1 ;1) |
| oui | non | oui | non |  | (1 ;0 ;1 ;0) |
| oui | non | non | oui |  | (1 ;0 ;0 ;1) |
| oui | non | non | non |  | (1 ;0 ;0 ;0) |
| non | oui | oui | oui |  | (0 ;1 ;1 ;1) |
| non | oui | oui | non |  | (0 ;1 ;1 ;0) |
| non | oui | non | oui |  | (0 ;1 ;0 ;1) |
| non | oui | non | non |  | (0 ;1 ;0 ;0) |
| non | non | oui | oui |  | (0 ;0 ;1 ;1) |
| non | non | oui | non |  | (0 ;0 ;1 ;0) |
| non | non | non | oui |  | (0 ;0 ;0 ;1) |
| non | non | non | non |  | (0 ;0 ;0 ;0) |

***Remarque***

On appelle **mot de longueur**  sur l’alphabet **un *n*-uplet d’éléments** de . Par exemple, est un mot de longueur sur l’alphabet . Il y a mots de longueur .

De façon générale, si on a un alphabet à 2 lettres, il est possible de faire mots de longueur .

## Combinaison

***Définition***

Soient et deux entiers naturels tels que et un ensemble fini de cardinal . On appelle **combinaison de éléments de**  toute **partie de**  ayant éléments.

***Exemple***

* Soit un ensemble de douze chevaux. On doit tiercéer sur les trois premiers chevaux en ne tenant pas compte de l’ordre. Il faut juste dire les noms des trois premiers, sans préciser le 1er , le 2e , le 3e .
* Par exemple la combinaison de 3 éléments signifie que dans les trois chevaux de tête il y a , et mais sans préciser qui est premier, deuxième et troisième.
* Les **tiercés ne tiennent pas compte** de l’ordre ( et sont des tiercés identiques )
* Il n’y a pas de répétition possible : n’est pas un tiercé.

Combien y a-t-il de tiercés sans tenir compte de l’ordre ?

*Réponse*:

* Dans l’exemple des tiercés dans l’ordre, on a vu que leur nombre est .
* Mais ici, on ne fait pas de différence entre les tiercés ,,.
* Ces six tiercés dans l’ordre correspondent à un seul tiercé sans tenir compte de l’ordre qui est .
* Le même principe s’applique aux 1320 tiercés dans l’ordre. Ils peuvent tous être regroupés par « paquets » de 6, chaque paquet correspondant à un tiercé sans tenir compte de l’ordre.
* Donc finalement, il y a tiercés en ne tenant pas compte de l’ordre.
* Par exemple on a ,
* Remarquer la notation entre accolades quand l’ordre ne compte pas ; Ce sont des ensembles (des sous ensembles à 3 éléments parmi 12).

Ce nombre est noté et se lit « 3 parmi 12 ». C’est le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 12. On l’a obtenu en divisant 1320 par le nombre de permutations de 3 éléments :

***Remarque :***

Le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 12 correspond au nombre de façon de **choisir 3 positions - sans tenir compte de l’ordre - parmi 12 positions**.

* Par exemple, il y a 220 façons d’avoir 3 fenêtres allumées sur les 12 que compte une maison.
* Il y a 220 façons de placer 3 lettres « a » dans un mot de 12 lettres écrit dans un alphabet qui ne contient que les lettres «  » et «  », par exemple le mot .

***Propriétés***

Soient et deux entiers naturels tels que . **Le nombre de combinaisons de éléments d’un ensemble à éléments**, noté est donné par

On peut simplifier si :

***Exemple : Calculer***

***Calcul à la main : n = 12 ; k = 3 ; n – k = 9***

en simplifiant :

***A la calculatrice :***

* Saisissez « 12 » et appuyez sur la touche **math.**
* Allez dans le menu **PROB.**
* Choisissez **Combinaison.**
* Ajoutez le « 3 » pour faire apparaitre cette écriture : (une autre notation pour ).
* Appuyez sur la touche **entrer**. On a 220 qui est le nombre de combinaisons de 3 parmi 12.

# Propriétés des combinaisons

## Propriétés

* . Dans un ensemble à éléments, il y a une seule partie à 0 élément : la partie vide.

***Exemple***: On considère l’ensemble . est le cardinal de .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  ? |  ? |  ? |  ? | Partie de  |  le nombre d’éléments dans la partie |
| oui | oui | oui | oui |  | 4 |
| oui | oui | oui | non |  | 3 |
| oui | oui | non | oui |  | 3 |
| oui | oui | non | non |  | 2 |
| oui | non | oui | oui |  | 3 |
| oui | non | oui | non |  | 2 |
| oui | non | non | oui |  | 2 |
| oui | non | non | non |  | 1 |
| non | oui | oui | oui |  | 3 |
| non | oui | oui | non |  | 2 |
| non | oui | non | oui |  | 2 |
| non | oui | non | non |  | 1 |
| non | non | oui | oui |  | 2 |
| non | non | oui | non |  | 1 |
| non | non | non | oui |  | 1 |
| non | non | non | non |  | **0** |

* . Dans un ensemble à éléments, il y a parties à 1 élément.

***Exemple***: On considère l’ensemble . est le cardinal de .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  ? |  ? |  ? |  ? | Partie de  |  le nombre d’éléments dans la partie |
| oui | oui | oui | oui |  | 4 |
| oui | oui | oui | non |  | 3 |
| oui | oui | non | oui |  | 3 |
| oui | oui | non | non |  | 2 |
| oui | non | oui | oui |  | 3 |
| oui | non | oui | non |  | 2 |
| oui | non | non | oui |  | 2 |
| oui | non | non | non |  | **1** |
| non | oui | oui | oui |  | 3 |
| non | oui | oui | non |  | 2 |
| non | oui | non | oui |  | 2 |
| non | oui | non | non |  | **1** |
| non | non | oui | oui |  | 2 |
| non | non | oui | non |  | **1** |
| non | non | non | oui |  | **1** |
| non | non | non | non |  | 0 |

* . Dans un ensemble à éléments, il y a parties à 2 éléments.

***Exemple***: On considère l’ensemble . est le cardinal de .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  ? |  ? |  ? |  ? | Partie de  |  le nombre d’éléments dans la partie |
| oui | oui | oui | oui |  | 4 |
| oui | oui | oui | non |  | 3 |
| oui | oui | non | oui |  | 3 |
| oui | oui | non | non |  | **2** |
| oui | non | oui | oui |  | 3 |
| oui | non | oui | non |  | **2** |
| oui | non | non | oui |  | **2** |
| oui | non | non | non |  | 1 |
| non | oui | oui | oui |  | 3 |
| non | oui | oui | non |  | **2** |
| non | oui | non | oui |  | **2** |
| non | oui | non | non |  | 1 |
| non | non | oui | oui |  | **2** |
| non | non | oui | non |  | 1 |
| non | non | non | oui |  | 1 |
| non | non | non | non |  | 0 |

* . Dans un ensemble à éléments, il y a partie à éléments : c’est l’ensemble .

***Exemple***: On considère l’ensemble . est le cardinal de .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  ? |  ? |  ? |  ? | Partie de  |  le nombre d’éléments dans la partie |
| oui | oui | oui | oui |  | **4** |
| oui | oui | oui | non |  | 3 |
| oui | oui | non | oui |  | 3 |
| oui | oui | non | non |  | 2 |
| oui | non | oui | oui |  | 3 |
| oui | non | oui | non |  | 2 |
| oui | non | non | oui |  | 2 |
| oui | non | non | non |  | 1 |
| non | oui | oui | oui |  | 3 |
| non | oui | oui | non |  | 2 |
| non | oui | non | oui |  | 2 |
| non | oui | non | non |  | 1 |
| non | non | oui | oui |  | 2 |
| non | non | oui | non |  | 1 |
| non | non | non | oui |  | 1 |
| non | non | non | non |  | 0 |

* Pour tous entiers et vérifiant ,

***Exemples***:

* On considère l’ensemble . est le cardinal de . Il y a autant de parties de à 1 élément que de parties de à 3 éléments. Choisir de prendre 1 élément parmi 4 est équivalent à choisir de ne pas prendre 3 éléments parmi 4.
* Il y a 220 façons d’avoir 3 fenêtres allumées sur les 12 que compte une maison. Donc il y a aussi 220 façons d’avoir 9 fenêtres allumées sur les 12.
* Soit un alphabet qui ne contient que deux lettre . On peut former 220 mots différents de 12 lettres qui contiennent 3 «  » et 9 «  » : …
Il y a aussi 220 mots différents de 12 lettres qui contiennent 9 «  » et 3 «  » par exemple le mot .

***Propriété***

Pour tout entier naturel ,

***Exemple :*** Le nombre de parties de l’ensemble avec est .

|  |  |
| --- | --- |
| Nombre de parties à 0 élément |  |
| Nombre de parties à 1 élément |  |
| Nombre de parties à 2 éléments |  |
| Nombre de parties à 3 éléments |  |
| Nombre de parties à 4 éléments |  |
| TOTAL |  |

***Démonstration***  Puisque **, ,** sont les nombres de parties à élément, élément, éléments, … , éléments d’un ensemble de cardinal et que le nombre de parties d’un tel ensemble est , alors la somme

## Relation et triangle de Pascal

* ***Théorème (relation de Pascal[[1]](#footnote-1))***

Pour tout entier naturel et pour tout entier naturel vérifiant on a :

***Exemple avec et***

On peut présenter sous forme d’arbre la fabrication des parties de l’ensemble .

Pour fabriquer une partie à 2 éléments parmi 4, on peut :

* Prendre 1 élément parmi et prendre , ce qui donne possibilités.
* Prendre 2 éléments parmi et ne pas prendre , ce qui donne possibilités.


Ainsi, selon le principe additif, le nombre de parties à 2 éléments parmi 4 est :

* Exploitation de la relation de Pascal pour calculer les coefficients

On peut construire un tableau avec, en lignes, les valeurs de et, en colonnes, les valeurs de avec .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

* + Puisque, pour tout , alors **on remplit la première colonne de 1.**
	+ Puisque, pour tout , alors **on remplit la diagonale de 1.**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

* + Puisque alors **on remplit toute la ligne n = 2.**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | +**||** |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | 2 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

* + Puisque  **et on remplit toute la ligne n = 3.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | +**||** |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | 2 |  |  |  |
|  |  | 3 | 3 |  |  |

 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | +**||** |  |  |
|  |  | 2 |  |  |  |
|  |  | 3 | 3 |  |  |

 |

* + On remplit **la ligne n = 4…**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | +**||** |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | +**||** |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

 |

Pour compléter la ligne, on peut utiliser la symétrie On peut obtenir un tableau aussi grand que l’on veut dans lequel à l’intersection de la ligne et de la colonne , on lit l’entier **.**

* Puisque est toujours inférieur ou égal à , il manque une partie du carré. Ce tableau est appelé **triangle de Pascal**.

***Démonstration de la relation de Pascal. 1ere méthode : par le calcul***

Montrons que pour tout entier naturel et pour tout entier naturel vérifiant on a :

On sait que

Calculons

Or,

donc pour tout entier naturel et pour tout entier naturel vérifiant  :

***Démonstration de la relation de Pascal. 2e méthode : par une méthode combinatoire***

On reprend le raisonnement de l’**e*xemple*** vu au début de ce paragraphe, mais en le généralisant.

On considère l’ensemble qui contient au moins éléments dont

Pour fabriquer une partie à éléments parmi , on peut :

* Prendre éléments dans privé de et prendre , ce qui donne possibilités.
* Prendre éléments dans privé de et ne pas prendre , ce qui donne possibilités.

Ainsi, selon le principe additif

## Coefficients binomiaux

Pour tous réels et , ce qui peut s’écrire :

Pour tous réels et , ce qui peut s’écrire :

, sont des cas particuliers de avec ou .

On démontre que pour tout entier  :

Cela s’écrit, en écriture condensée avec le symbole « sigma » :

C’est la **formule du binôme de Newton**[[2]](#footnote-2) et les entiers  **sont les coefficients binomiaux.**

***Exemple***

***Algorithme***

La construction du triangle de Pascal permet d’écrire un algorithme de calcul des coefficients

|  |  |
| --- | --- |
| Algorithme | Script en Python |
| Fonction comb(n,k)Si k=0 ou k=n alorsRenvoyer 1SinonRenvoyer comb(n-1,k-1)+comb(n-1,k)FinSi |  |

Ensuite, on exécute le script DENOMBRE puis on choisit la fonction comb (touche var de la TI83)



On retrouve bien la valeur de la combinaison .

1. **Blaise Pascal** (1623 – 1662) est un mathématicien, physicien, inventeur, philosophe français. [↑](#footnote-ref-1)
2. **Isaac Newton** : 1642 - 1727 est un mathématicien et physicien anglais. [↑](#footnote-ref-2)