

# CHAPITRE 7 : Combinatoire et dénombrement

---

1	Principes additifs et multiplicatifs .....	2
1.1	Ensemble fini et cardinal .....	2
1.2	Principe additif .....	2
1.3	Principe multiplicatif .....	3
2	$k$ -uplets d'un ensemble fini .....	4
2.1	Nombre de $k$ -uplets d'un ensemble à $n$ éléments .....	4
2.2	$k$ -uplets d'éléments distincts d'un ensemble, permutations.....	4
3	Parties d'un ensemble et combinaisons.....	6
3.1	Nombre de parties d'un ensemble.....	6
3.2	Combinaison.....	7
4	Propriétés des combinaisons .....	9
4.1	Propriétés .....	9
4.2	Relation et triangle de Pascal .....	12
4.3	Coefficients binomiaux.....	16

# CHAPITRE 7 : Combinatoire et dénombrement

---

## 1 Principes additifs et multiplicatifs

### 1.1 Ensemble fini et cardinal

#### Définition

Soit  $n$  un entier naturel. Lorsqu'un ensemble  $E$  a  $n$  éléments, on dit que  $E$  est un **ensemble fini**.

Le nombre  $n$  d'éléments de  $E$  est appelé **cardinal de  $E$** . On le note  $Card(E)$ .

#### Exemple

Si  $E = \{\text{rouge} ; \text{vert} ; \text{bleu}\}$  alors on a  $Card(E) = 3$

#### Remarques

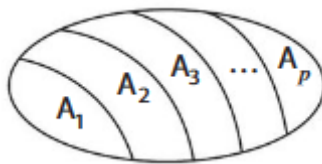
- Cas de l'ensemble vide :  $Card(\emptyset) = 0$
- Certains ensembles ne sont pas finis : par exemple l'ensemble des entiers naturels, l'ensemble des réels de l'intervalle  $[0 ; 1]$ .

### 1.2 Principe additif

#### Propriété

Soient  $A_1, A_2, \dots, A_p$   $p$  ensembles finis, deux à deux disjoints. On a :

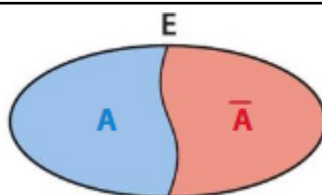
$$Card(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p) = Card(A_1) + Card(A_2) + \dots + Card(A_p)$$



#### Corollaire

Soient  $A$  une partie d'un ensemble fini  $E$  et  $\bar{A}$  le complémentaire de  $A$  dans  $E$ .

On a :  $Card(\bar{A}) = Card(E) - Card(A)$



### 1.3 Principe multiplicatif

#### Définition et propriété

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides.

**Le produit cartésien** de  $E$  par  $F$ , noté  $E \times F$  (lire «  $E$  croix  $F$  ») est l'ensemble des couples  $(x ; y)$  avec  $x \in E$  et  $y \in F$ .

Lorsque les ensembles  $E$  et  $F$  sont finis,  $Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$ .

#### Remarque

Le signe  $\times$  dans  $Card(E \times F)$  désigne le *produit cartésien des ensembles*  $E$  et  $F$ , alors que celui dans  $Card(E) \times Card(F)$  symbolise la multiplication de deux entiers.

#### Exemple

Soient  $E = \{2 ; 3 ; 4\}$  et  $F = \{pique ; carreau\}$ . Alors :

$E \times F = \{(2 ; pique) ; (2 ; carreau) ; (3 ; pique) ; (3 ; carreau) ; (4 ; pique) ; (4 ; carreau)\}$  et

$F \times E = \{(pique ; 2) ; (pique ; 3) ; (pique ; 4) ; (carreau ; 2) ; (carreau ; 3) ; (carreau ; 4)\}$ .

#### Définition et propriété

Soient  $k$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $E_1, E_2, \dots, E_k$   $k$  ensembles non vides.

- Toute liste ordonnée  $(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_k)$  avec  $x_i \in E_i$  pour  $i$  allant de 1 à  $k$  est appelée  **$k$ -uplet** (ou  **$k$ -liste**).
- L'ensemble de ces  $k$ -uplets est le **produit cartésien**  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$
- Lorsque les ensembles  $E_1, E_2, \dots, E_k$  sont finis :

$$Card(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times \dots \times Card(E_k)$$

#### Remarques

- Un 2-uplet est un couple et un 3-uplet est un triplet.
- Dans un  $k$ -uplet l'ordre compte. Par exemple les couples  $(6 ; 8)$  et  $(8 ; 6)$  sont *différents*.

#### Exemple

Soient  $E = \{2 ; 3 ; 4\}$ ,  $F = \{pique ; carreau\}$  et  $G = \{nord ; sud ; est ; ouest\}$

Le 3-uplet  $(pique ; 2 ; ouest)$  est un des éléments du produit cartésien  $E \times F \times G$ .

## 2 $k$ -uplets d'un ensemble fini

### 2.1 Nombre de $k$ -uplets d'un ensemble à $n$ éléments

#### Définition

Soit  $k$  un entier naturel non nul et  $E$  un ensemble non vide.

Un  $k$ -uplet (ou  $k$ -liste) d'éléments de  $E$  est un élément du produit cartésien :

$$E^k = E \times E \times \dots \times E \quad (k \text{ facteurs})$$

#### Exemple

Si  $G = \{\text{nord} ; \text{sud} ; \text{est} ; \text{ouest}\}$  alors le 5-uplet (*ouest ; nord ; ouest ; sud ; ouest*) est un des éléments du produit cartésien  $G^5$ .

#### Théorème

Soient  $n$  et  $k$  deux entiers naturels non nuls et  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ .

**Le nombre de  $k$ -uplets** du produit cartésien  $E^k$  est  $n^k$ , soit  $\text{Card}(E^k) = n^k$

#### Exemple

Soit un ensemble  $T = \{A ; B ; C\}$  de trois tiroirs.

Un rangement de cinq jetons de couleurs différentes dans les tiroirs A, B, C peut être codé par un 5-uplet du produit cartésien  $T^5$ . Par exemple le rangement « le 1<sup>er</sup> jeton est dans A, le 2<sup>e</sup> est dans B, le 3<sup>e</sup> est dans B, le 4<sup>e</sup> est dans A, le 5<sup>e</sup> est dans C » correspond au 5-uplet (*A ; B ; B ; A ; C*).

Donc si on veut calculer le nombre de rangements de 5 jetons différents dans 3 tiroirs, il suffit de calculer le cardinal de  $T^5$ . Ici  $\text{Card}(T^5) = 3^5 = 243$ . Donc il y a 243 rangements possibles.

### 2.2 $k$ -uplets d'éléments distincts d'un ensemble, permutations

#### Théorème

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $k$  un entier naturel tel que  $1 \leq k \leq n$ . Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ . **Le nombre de  $k$ -uplets d'éléments deux à deux distincts** de  $E$  est :

$$n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1) \quad (\text{dans ce produit il y a } k \text{ facteurs})$$

### Exemple

- Soit un ensemble  $T = \{A ; B ; C ; D ; E ; F ; G ; H ; I ; J ; K ; L\}$  de douze chevaux. On doit tiercéer sur l'ordre d'arrivée des trois premiers chevaux.
- Par exemple le 3-uplet  $(L ; A ; B)$  signifie que le 1<sup>er</sup> est le cheval  $L$ , le 2<sup>e</sup> est le cheval  $A$  et le 3<sup>e</sup> est le cheval  $B$ .
- Les tiercés tiennent compte de l'ordre ( $(L ; A ; B)$  et  $(L ; B ; A)$  sont des tiercés différents)
- Il n'y a pas de répétition possible :  $(L ; A ; A)$  n'est pas un tiercé.

Combien y a-t-il de tiercés possibles en tenant compte de l'ordre d'arrivée ?

Réponse :

- On a 12 possibilités pour le 1<sup>er</sup>, de 11 possibilités pour le 2<sup>e</sup> et de 10 possibilités pour le 3<sup>e</sup>.
- **Les tiercés en tenant compte de l'ordre sont les 3-uplets** d'éléments deux à deux distincts de l'ensemble  $T = \{A ; B ; C ; D ; E ; F ; G ; H ; I ; J ; K ; L\}$ .
- Leur nombre est  $12 \times 11 \times 10 = 1320$ .

### Définition

On appelle **permutation** d'un ensemble  $E$  à  $n$  éléments tout  $n$ -uplet d'éléments deux à deux distincts de  $E$ .

### Exemple

Les permutations de l'ensemble  $E = \{a ; b ; c\}$  sont :

$$(a ; b ; c), (a ; c ; b), (b ; a ; c), (b ; c ; a), (c ; a ; b), (c ; b ; a)$$

### Théorème et définition

**Le nombre de permutations** d'un ensemble à  $n$  éléments ( $n \geq 1$ ) est le nombre  $n!$  (qui se lit « factorielle  $n$  » ou «  $n$  factorielle ») défini par :  $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots \times 2 \times 1$ .

Dans l'exemple précédent, l'ensemble  $E$  a 3 éléments.

Le nombre de permutations (ou nombre de « rangements » de ses éléments) est  $3! = 6$ .

### Remarque

On convient que  $0! = 1$

(Il n'y a qu'une façon de « ranger » l'ensemble vide puisqu'il ne contient aucun élément).

### 3 Parties d'un ensemble et combinaisons

#### 3.1 Nombre de parties d'un ensemble

##### Définition

Soit  $E$  un ensemble. Dire qu'un ensemble  $F$  est une partie de  $E$  (ou que  $F$  est un **sous-ensemble** de  $E$ , ou que  $F$  est inclus dans  $E$ ) signifie que tous les éléments de  $F$  sont des éléments de  $E$ . On note alors  $F \subset E$ .

##### Remarque

Il ne faut pas confondre une partie d'un ensemble avec un  $k$ -uplet. Dans une partie (qu'on note entre accolades), l'ordre des éléments n'a pas d'importance. Par exemple  $\{1 ; 2\}$  et  $\{2 ; 1\}$  sont *identiques*.

##### Exemple

On considère l'ensemble  $E = \{a ; b ; c ; d\}$ . Les ensembles  $A = \{a ; c\}$  et  $B = \emptyset$  sont des parties de  $E$ .

##### Théorème

Soit  $n$  un entier naturel. **Le nombre de parties d'un ensemble** incluses dans un ensemble  $E$  à  $n$  éléments est égal au nombre de  $n$ -uplets de l'ensemble  $\{0 ; 1\}$  c'est-à-dire  $2^n$ .

Cela correspond au fait que pour constituer une partie d'un ensemble  $E$  à  $n$  éléments, on a  $n$  choix successifs avec 2 possibilités : prendre ou ne pas prendre chaque élément de  $E$ .

##### Exemple

On considère l'ensemble  $E = \{a ; b ; c ; d\}$ . Il y a  $2^4 = 16$  parties de  $E$ .

$a ?$	$b ?$	$c ?$	$d ?$	Partie de $E$	4-uplets de l'ensemble $\{0 ; 1\}$
oui	oui	oui	oui	$\{a ; b ; c ; d\}$	(1 ; 1 ; 1 ; 1)
oui	oui	oui	non	$\{a ; b ; c\}$	(1 ; 1 ; 1 ; 0)
oui	oui	non	oui	$\{a ; b ; d\}$	(1 ; 1 ; 0 ; 1)
oui	oui	non	non	$\{a ; b\}$	(1 ; 1 ; 0 ; 0)
oui	non	oui	oui	$\{a ; c ; d\}$	(1 ; 0 ; 1 ; 1)
oui	non	oui	non	$\{a ; c\}$	(1 ; 0 ; 1 ; 0)
oui	non	non	oui	$\{a ; d\}$	(1 ; 0 ; 0 ; 1)
oui	non	non	non	$\{a\}$	(1 ; 0 ; 0 ; 0)
non	oui	oui	oui	$\{b ; c ; d\}$	(0 ; 1 ; 1 ; 1)
non	oui	oui	non	$\{b ; c\}$	(0 ; 1 ; 1 ; 0)
non	oui	non	oui	$\{b ; d\}$	(0 ; 1 ; 0 ; 1)
non	oui	non	non	$\{b\}$	(0 ; 1 ; 0 ; 0)
non	non	oui	oui	$\{c ; d\}$	(0 ; 0 ; 1 ; 1)
non	non	oui	non	$\{c\}$	(0 ; 0 ; 1 ; 0)
non	non	non	oui	$\{d\}$	(0 ; 0 ; 0 ; 1)
non	non	non	non	$\emptyset$	(0 ; 0 ; 0 ; 0)

### Remarque

On appelle **mot de longueur  $n$**  sur l'alphabet  $A = \{a ; b\}$  un  **$n$ -uplet d'éléments** de  $A$ . Par exemple,  $(a ; b ; b ; a)$  est un mot de longueur 4 sur l'alphabet  $A$ . Il y a  $2^4$  mots de longueur 4.

De façon générale, si on a un alphabet à 2 lettres, il est possible de faire  $2^n$  mots de longueur  $n$ .

## 3.2 Combinaison

### Définition

Soient  $n$  et  $k$  deux entiers naturels tels que  $0 \leq k \leq n$  et  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ . On appelle **combinaison de  $k$  éléments de  $E$**  toute **partie de  $E$**  ayant  $k$  éléments.

### Exemple

- Soit un ensemble  $T = \{A ; B ; C ; D ; E ; F ; G ; H ; I ; J ; K ; L\}$  de douze chevaux. On doit tiercéer sur les trois premiers chevaux en ne tenant pas compte de l'ordre. Il faut juste dire les noms des trois premiers, sans préciser le 1<sup>er</sup>, le 2<sup>e</sup>, le 3<sup>e</sup>.
- Par exemple la combinaison de 3 éléments  $\{A ; B ; L\}$  signifie que dans les trois chevaux de tête il y a  $A, B$  et  $L$  mais sans préciser qui est premier, deuxième et troisième.
- Les **tiercés ne tiennent pas compte** de l'ordre ( $\{A ; B ; L\}$  et  $\{A ; L ; B\}$  sont des tiercés identiques)
- Il n'y a pas de répétition possible :  $\{A ; B ; A\}$  n'est pas un tiercé.

Combien y a-t-il de tiercés sans tenir compte de l'ordre ?

Réponse :

- Dans l'exemple des tiercés dans l'ordre, on a vu que leur nombre est  $12 \times 11 \times 10 = 1320$ .
- Mais ici, on ne fait pas de différence entre les tiercés  $(A ; B ; L), (A ; L ; B), (B ; A ; L), (B ; L ; A), (L ; A ; B), (L ; B ; A)$ .
- Ces six tiercés dans l'ordre correspondent à un seul tiercé sans tenir compte de l'ordre qui est  $\{A ; B ; L\}$ .
- Le même principe s'applique aux 1320 tiercés dans l'ordre. Ils peuvent tous être regroupés par « paquets » de 6, chaque paquet correspondant à un tiercé sans tenir compte de l'ordre.
- Donc finalement, il y a  $\frac{1320}{6} = 220$  tiercés en ne tenant pas compte de l'ordre.
- Par exemple on a  $\{A ; B ; L\}, \{A ; C ; D\}, \{D ; F ; H\} \dots$
- Remarquer la notation entre accolades quand l'ordre ne compte pas ; Ce sont des ensembles (des sous ensembles à 3 éléments parmi 12).

Ce nombre est noté  $\binom{12}{3}$  et se lit « 3 parmi 12 ». C'est le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 12. On l'a obtenu en divisant 1320 par le nombre de permutations de 3 éléments :

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3!}$$

**Remarque :**

Le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 12 correspond au nombre de façon de **choisir 3 positions - sans tenir compte de l'ordre - parmi 12 positions.**

- Par exemple, il y a 220 façons d'avoir 3 fenêtres allumées sur les 12 que compte une maison.
- Il y a 220 façons de placer 3 lettres « a » dans un mot de 12 lettres écrit dans un alphabet qui ne contient que les lettres « a » et « b », par exemple le mot  $(a, a, b, b, b, b, b, a, b, b, b, b)$ .

**Propriétés**

Soient  $n$  et  $k$  deux entiers naturels tels que  $0 \leq k \leq n$ . **Le nombre de combinaisons de  $k$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments**, noté  $\binom{n}{k}$  est donné par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

On peut simplifier si  $k \neq 0$  :

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k!}$$

**Exemple : Calculer  $\binom{12}{3}$**

**Calcul à la main :  $n = 12$  ;  $k = 3$  ;  $n - k = 9$**

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{9! \times 3!}$$

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9! \times 3!}$$

en simplifiant :

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3!}$$

$$\binom{12}{3} = 220$$

**A la calculatrice :**

- Saisissez « 12 » et appuyez sur la touche **math**.
- Allez dans le menu **PROB**.
- Choisissez **Combinaison**.
- Ajoutez le « 3 » pour faire apparaitre cette écriture :  ${}_{12}C_3$  (une autre notation pour  $\binom{12}{3}$ ).
- Appuyez sur la touche **entrer**. On a 220 qui est le nombre de combinaisons de 3 parmi 12.



## 4 Propriétés des combinaisons

### 4.1 Propriétés

- $\binom{n}{0} = 1$ . Dans un ensemble à  $n$  éléments, il y a une seule partie à 0 élément : la partie vide.

**Exemple** : On considère l'ensemble  $E = \{a ; b ; c ; d\}$ .  $n = 4$  est le cardinal de  $E$ .  $\binom{4}{0} = 1$

$a ?$	$b ?$	$c ?$	$d ?$	Partie de $E$	$k$ le nombre d'éléments dans la partie
oui	oui	oui	oui	$\{a ; b ; c ; d\}$	4
oui	oui	oui	non	$\{a ; b ; c\}$	3
oui	oui	non	oui	$\{a ; b ; d\}$	3
oui	oui	non	non	$\{a ; b\}$	2
oui	non	oui	oui	$\{a ; c ; d\}$	3
oui	non	oui	non	$\{a ; c\}$	2
oui	non	non	oui	$\{a ; d\}$	2
oui	non	non	non	$\{a\}$	1
non	oui	oui	oui	$\{b ; c ; d\}$	3
non	oui	oui	non	$\{b ; c\}$	2
non	oui	non	oui	$\{b ; d\}$	2
non	oui	non	non	$\{b\}$	1
non	non	oui	oui	$\{c ; d\}$	2
non	non	oui	non	$\{c\}$	1
non	non	non	oui	$\{d\}$	1
non	non	non	non	$\emptyset$	0

- $\binom{n}{1} = n$ . Dans un ensemble à  $n$  éléments, il y a  $n$  parties à 1 élément.

**Exemple** : On considère l'ensemble  $E = \{a ; b ; c ; d\}$ .  $n = 4$  est le cardinal de  $E$ .  $\binom{4}{1} = 4$

$a ?$	$b ?$	$c ?$	$d ?$	Partie de $E$	$k$ le nombre d'éléments dans la partie
oui	oui	oui	oui	$\{a ; b ; c ; d\}$	4
oui	oui	oui	non	$\{a ; b ; c\}$	3
oui	oui	non	oui	$\{a ; b ; d\}$	3
oui	oui	non	non	$\{a ; b\}$	2
oui	non	oui	oui	$\{a ; c ; d\}$	3
oui	non	oui	non	$\{a ; c\}$	2
oui	non	non	oui	$\{a ; d\}$	2
oui	non	non	non	$\{a\}$	1
non	oui	oui	oui	$\{b ; c ; d\}$	3
non	oui	oui	non	$\{b ; c\}$	2
non	oui	non	oui	$\{b ; d\}$	2
non	oui	non	non	$\{b\}$	1
non	non	oui	oui	$\{c ; d\}$	2
non	non	oui	non	$\{c\}$	1
non	non	non	oui	$\{d\}$	1
non	non	non	non	$\emptyset$	0

- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ . Dans un ensemble à  $n$  éléments, il y a  $\frac{n(n-1)}{2}$  parties à 2 éléments.

**Exemple :** On considère l'ensemble  $E = \{a ; b ; c ; d\}$ .  $n = 4$  est le cardinal de  $E$ .  $\binom{4}{2} = \frac{4(4-1)}{2} = 6$

$a ?$	$b ?$	$c ?$	$d ?$	Partie de $E$	$k$ le nombre d'éléments dans la partie
oui	oui	oui	oui	$\{a ; b ; c ; d\}$	4
oui	oui	oui	non	$\{a ; b ; c\}$	3
oui	oui	non	oui	$\{a ; b ; d\}$	3
oui	oui	non	non	$\{a ; b\}$	2
oui	non	oui	oui	$\{a ; c ; d\}$	3
oui	non	oui	non	$\{a ; c\}$	2
oui	non	non	oui	$\{a ; d\}$	2
oui	non	non	non	$\{a\}$	1
non	oui	oui	oui	$\{b ; c ; d\}$	3
non	oui	oui	non	$\{b ; c\}$	2
non	oui	non	oui	$\{b ; d\}$	2
non	oui	non	non	$\{b\}$	1
non	non	oui	oui	$\{c ; d\}$	2
non	non	oui	non	$\{c\}$	1
non	non	non	oui	$\{d\}$	1
non	non	non	non	$\emptyset$	0

- $\binom{n}{n} = 1$ . Dans un ensemble  $E$  à  $n$  éléments, il y a 1 partie à  $n$  éléments : c'est l'ensemble  $E$ .

**Exemple :** On considère l'ensemble  $E = \{a ; b ; c ; d\}$ .  $n = 4$  est le cardinal de  $E$ .  $\binom{4}{4} = 1$

$a ?$	$b ?$	$c ?$	$d ?$	Partie de $E$	$k$ le nombre d'éléments dans la partie
oui	oui	oui	oui	$\{a ; b ; c ; d\}$	4
oui	oui	oui	non	$\{a ; b ; c\}$	3
oui	oui	non	oui	$\{a ; b ; d\}$	3
oui	oui	non	non	$\{a ; b\}$	2
oui	non	oui	oui	$\{a ; c ; d\}$	3
oui	non	oui	non	$\{a ; c\}$	2
oui	non	non	oui	$\{a ; d\}$	2
oui	non	non	non	$\{a\}$	1
non	oui	oui	oui	$\{b ; c ; d\}$	3
non	oui	oui	non	$\{b ; c\}$	2
non	oui	non	oui	$\{b ; d\}$	2
non	oui	non	non	$\{b\}$	1
non	non	oui	oui	$\{c ; d\}$	2
non	non	oui	non	$\{c\}$	1
non	non	non	oui	$\{d\}$	1
non	non	non	non	$\emptyset$	0

- Pour tous entiers  $n$  et  $k$  vérifiant  $0 \leq k \leq n$ ,  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

**Exemples :**

- On considère l'ensemble  $E = \{a ; b ; c ; d\}$ .  $n = 4$  est le cardinal de  $E$ . Il y a autant de parties de  $E$  à 1 élément que de parties de  $E$  à 3 éléments. Choisir de prendre 1 élément parmi 4 est équivalent à choisir de ne pas prendre 3 éléments parmi 4.
- Il y a 220 façons d'avoir 3 fenêtres allumées sur les 12 que compte une maison. Donc il y a aussi 220 façons d'avoir 9 fenêtres allumées sur les 12.
- Soit un alphabet qui ne contient que deux lettre  $A = \{a ; b\}$ . On peut former 220 mots différents de 12 lettres qui contiennent 3 « a » et 9 « b » :  $(a, a, b, b, b, b, b, a, b, b, b, b)$ ... Il y a aussi 220 mots différents de 12 lettres qui contiennent 9 « a » et 3 « b » par exemple le mot  $(b, b, a, a, a, a, a, b, a, a, a, a)$ .

$$\binom{12}{3} = \binom{12}{9}$$

**Propriété**

Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

**Exemple :** Le nombre de parties de l'ensemble  $E = \{a ; b ; c ; d\}$  avec  $n = 4$  est  $2^4 = 16$ .

Nombre de parties à 0 élément	$\binom{4}{0} = 1$
Nombre de parties à 1 élément	$\binom{4}{1} = 4$
Nombre de parties à 2 éléments	$\binom{4}{2} = 6$
Nombre de parties à 3 éléments	$\binom{4}{3} = 4$
Nombre de parties à 4 éléments	$\binom{4}{4} = 1$
TOTAL	$2^4 = 16$

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} = 2^4$$

**Démonstration** Puisque  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$  sont les nombres de parties à 0 élément, 1 élément, 2 éléments, ... ,  $n$  éléments d'un ensemble  $E$  de cardinal  $n$  et que le nombre de parties d'un tel ensemble est  $2^n$ , alors la somme

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

## 4.2 Relation et triangle de Pascal

- *Théorème (relation de Pascal)<sup>1</sup>*

Pour tout entier naturel  $n \geq 2$  et pour tout entier naturel  $k$  vérifiant  $1 \leq k \leq n - 1$  on a :

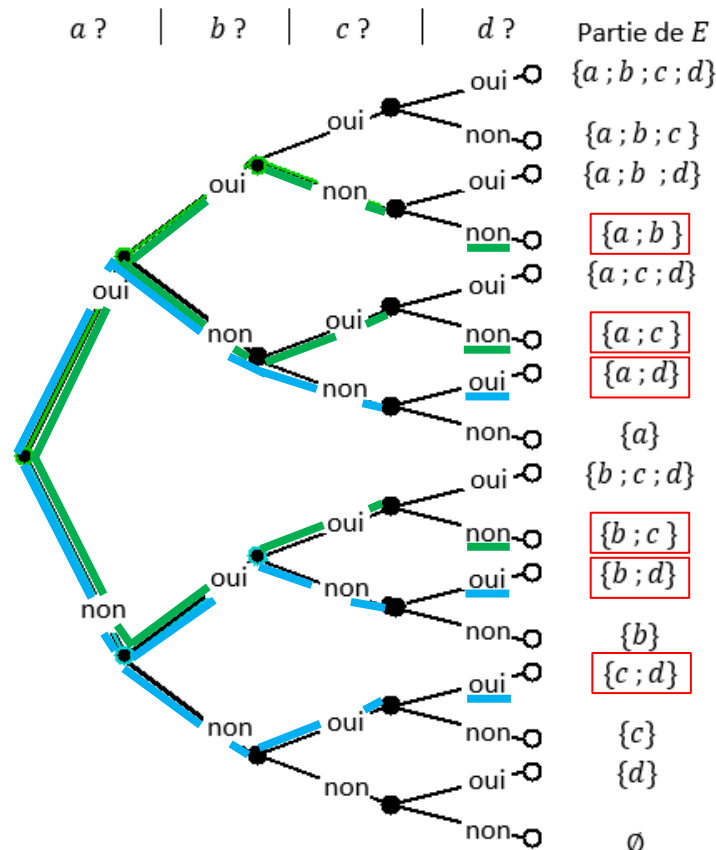
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

**Exemple avec  $n = 4$  et  $k = 2$**

On peut présenter sous forme d'arbre la fabrication des parties de l'ensemble  $E = \{a ; b ; c ; d\}$ .

Pour fabriquer une partie à 2 éléments parmi 4, on peut :

- Prendre 1 élément parmi  $\{a ; b ; c\}$  et prendre  $d$ , ce qui donne  $\binom{3}{1} = 3$  possibilités.
- Prendre 2 éléments parmi  $\{a ; b ; c\}$  et ne pas prendre  $d$ , ce qui donne  $\binom{3}{2} = 3$  possibilités.



Ainsi, selon le principe additif, le nombre de parties à 2 éléments parmi 4 est :  $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}$

<sup>1</sup> **Blaise Pascal** (1623 – 1662) est un mathématicien, physicien, inventeur, philosophe français.

- Exploitation de la relation de Pascal pour calculer les coefficients  $\binom{n}{k}$

On peut construire un tableau avec, en lignes, les valeurs de  $n \in \mathbb{N}$  et, en colonnes, les valeurs de  $k \in \mathbb{N}$  avec  $0 \leq k \leq n$ .

$n$	$k$	0	1	2	3	4
0						
1						
2						
3						
4						

- Puisque, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\binom{n}{0} = 1$  alors **on remplit la première colonne de 1.**
- Puisque, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\binom{n}{n} = 1$  alors **on remplit la diagonale de 1.**

$n$	$k$	0	1	2	3	4
0		1				
1		1	1			
2		1		1		
3		1			1	
4		1				1

- Puisque  $\binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1}$  alors **on remplit toute la ligne  $n = 2$ .**

$n$	$k$	0	1	2	3	4
0		1				
1			1 + 1			
2		1		1		
			2			
3		1			1	

- Puisque  $\binom{3}{1} = \binom{2}{0} + \binom{2}{1}$  et  $\binom{3}{2} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2}$  on remplit toute la ligne  $n = 3$ .

$n$	$k$	0	1	2	3	4
0		1				
1		1	1			
2			1 + 2	1		
3		1	3	3	1	

$n$	$k$	0	1	2	3	4
0		1				
1		1	1			
2		1	2 + 1			
3		1	3	3	1	

- On remplit la ligne  $n = 4$ ...

$n$	$k$	0	1	2	3	4
0		1				
1		1	1			
2		1	2	1		
3		1	3 + 3	3	1	
4		1	6	4	4	1

$n$	$k$	0	1	2	3	4
0		1				
1		1	1			
2		1	2	1		
3		1	3 + 3	1		
4		1	6	4	4	1

Pour compléter la ligne, on peut utiliser la symétrie  $\binom{4}{3} = \binom{4}{1}$ . On peut obtenir un tableau aussi grand que l'on veut dans lequel à l'intersection de la ligne  $n$  et de la colonne  $k$ , on lit l'entier  $\binom{n}{k}$ .

- Puisque  $k$  est toujours inférieur ou égal à  $n$ , il manque une partie du carré. Ce tableau est appelé **triangle de Pascal**.

#### **Démonstration de la relation de Pascal. 1<sup>ère</sup> méthode : par le calcul**

Montrons que pour tout entier naturel  $n \geq 2$  et pour tout entier naturel  $k$  vérifiant  $1 \leq k \leq n - 1$  on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

On sait que

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k!}$$

Calculons  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1) \times \dots \times ((n-1) - (k-1) + 1)}{(k-1)!} + \frac{(n-1) \times \dots \times ((n-1) - k + 1)}{k!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1) \times \dots \times (n-1-k+1+1)}{(k-1)!} + \frac{(n-1) \times \dots \times (n-1-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{(k-1)!} + \frac{(n-1) \times \dots \times (n-k)}{k!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{[(n-1) \times \dots \times (n-k+1)] \times k}{(k-1)! \times k} + \frac{(n-1) \times \dots \times (n-k)}{k!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{[(n-1) \times \dots \times (n-k+1)] \times k + (n-1) \times \dots \times (n-k)}{k!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{[(n-1) \times \dots \times (n-k+1)] \times k + (n-1) \times \dots \times (n-k+1) \times (n-k)}{k!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{[(n-1) \times \dots \times (n-k+1)] \times k + (n-1) \times \dots \times (n-k+1) \times (n-k)}{k!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1) \times \dots \times (n-k+1) \times [k + (n-k)]}{k!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1) \times \dots \times (n-k+1) \times [n]}{k!}$$

Or,

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k!}$$

donc pour tout entier naturel  $n \geq 2$  et pour tout entier naturel  $k$  vérifiant  $1 \leq k \leq n-1$  :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

### Démonstration de la relation de Pascal. 2<sup>e</sup> méthode : par une méthode combinatoire

On reprend le raisonnement de l'**exemple** vu au début de ce paragraphe, mais en le généralisant.

On considère l'ensemble  $E = \{a ; \dots ; \dots ; \dots \dots\}$  qui contient au moins  $n = 2$  éléments dont  $a$

Pour fabriquer une partie à  $k$  éléments parmi  $n$ , on peut :

- Prendre  $k-1$  éléments dans  $E$  privé de  $\{a\}$  et prendre  $a$ , ce qui donne  $\binom{n-1}{k-1}$  possibilités.
- Prendre  $k$  éléments dans  $E$  privé de  $\{a\}$  et ne pas prendre  $a$ , ce qui donne  $\binom{n-1}{k}$  possibilités.

Ainsi, selon le principe additif  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

### 4.3 Coefficients binomiaux

Pour tous réels  $a$  et  $b$   $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , ce qui peut s'écrire :

$$(a + b)^2 = \binom{2}{0} a^{2-0} b^0 + \binom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} b^2$$

Pour tous réels  $a$  et  $b$   $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ , ce qui peut s'écrire :

$$(a + b)^3 = \binom{3}{0} a^{3-0} b^0 + \binom{3}{1} a^{3-1} b^1 + \binom{3}{2} a^{3-2} b^2 + \binom{3}{3} a^{3-3} b^3$$

$(a + b)^2$ ,  $(a + b)^3$  sont des cas particuliers de  $(a + b)^n$  avec  $n = 2$  ou  $n = 3$ .

On démontre que pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^{n-0} b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} a^{n-n} b^n$$

Cela s'écrit, en écriture condensée avec le symbole « sigma » :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

C'est la **formule du binôme de Newton**<sup>2</sup> et les entiers  $\binom{n}{k}$  sont les **coefficients binomiaux**.

**Exemple**  $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

#### Algorithme

```

Fonction comb(n,k)
  Si k=0 ou k=n alors
    Renvoyer 1
  Sinon
    Renvoyer comb(n-1,k-1)+comb(n-1,k)
  FinSi
  
```

#### Script en Python

```

ÉDITEUR : DENOMBRE
LIGNE DU SCRIPT 0006
def comb(n,k):
    if k==0 or k==n:
        return 1
    else:
        return comb(n-1,k-1)+comb(n-1,k)
  
```

Ensuite, on exécute le script DENOMBRE puis on choisit la fonction comb (touche var de la TI83)

```
>>> comb(4,2)
6
```

On retrouve bien la valeur de la combinaison  $\binom{4}{2} = 6$ .

<sup>2</sup> **Isaac Newton** : 1642 - 1727 est un mathématicien et physicien anglais.