23 TDS2

Exercice 1

Question 1

- On peut voir sur cette courbe le sens de variation de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$. Cela permet de déduire le signe de la dérivée f'.

x	0		3		$+\infty$
sens de variation de f	‖	↗		↘	
Donc le signe de f' est	‖	$+$	0	$-$	

- On peut aussi voir sur cette courbe la convexité de la fonction f et cela permet de déduire le signe de la dérivée seconde f''.

x	0		5		$+\infty$
Convexité de f	‖	concave		convexe	
Donc le signe de f'' est	‖	$-$	0	$+$	

- Enfin, en utilisant la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses, on peut déduire le signe de f

x	0		1		$+\infty$
Position de $\mathcal{C}$ par rapport à (Ox)	‖	en-dessous		au-dessus	
Donc le signe de f est	‖	$-$	0	$+$	

En conséquence, f est positive sur $[1\,;+\infty[$ donc sur $[5\,;+\infty[$ et f'' est positive sur $[5\,;+\infty[$.

Réponse D

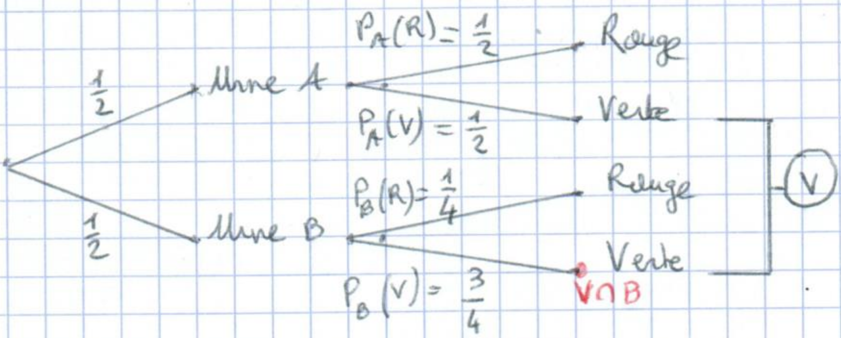
Question 2

$\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$	$g(t)=\dfrac{2}{3+e^{-t}}$	$g(0)=\dfrac{2}{3+1}=\dfrac{1}{2}$	
$\begin{cases} a=4 \\ b=\frac{4}{3} \end{cases}$	$g(t)=\dfrac{4}{\frac{4}{3}+e^{-t}}$	$g(0)=\dfrac{4}{\frac{4}{3}+1}=\dfrac{12}{7}$	
$\begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$	$g(t)=\dfrac{4}{1+e^{-t}}$	$g(0)=\dfrac{4}{1+1}=2$	$\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=4$
$\begin{cases} a=6 \\ b=2 \end{cases}$	$g(t)=\dfrac{6}{2+e^{-t}}$	$g(0)=\dfrac{6}{2+1}=2$	$\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=3$

Réponse D

Question 3

On peut représenter la situation par un arbre de probabilités :



D'après la formule des probabilités totales, $p(V) = p(A) \times P_A(V) + p(B) \times P_B(V)$

$$p(V) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \underline{\frac{5}{8}}$$

On cherche la probabilité $P_V(B)$.

On sait que $P_V(B) = \dfrac{P(V \cap B)}{P(V)}$ $\qquad P(V \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \underline{\frac{3}{8}}$

Donc $P_V(B) = \dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \underline{\frac{3}{5}}$ Réponse C

Question 4

La convexité et les points d'inflexion de la courbe C_h sont donnés par la dérivée seconde h''.

$h'(x) = 4e^{2x} + (4x - 16) \times 2e^{2x}$
$h'(x) = (4 + (4x - 16) \times 2)\, e^{2x}$
$h'(x) = (8x - 28)\, e^{2x}$

$h''(x) = 8e^{2x} + (8x - 28) \times 2e^{2x}$
$h''(x) = (8 + (8x - 28) \times 2)\, e^{2x}$
$h''(x) = (16x - 48)\, e^{2x}$

$16x - 48 = 0$
$16x = 48$
$x = 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
signe de $16x - 48$	$-$	0	$+$
signe de e^{2x}	$+$		$+$
signe de $h''(x)$	$-$	0	$+$
Donc h est	concave		convexe

On conclut que C_h a un point d'inflexion en $x = 3$

Réponse B

Exercice 2

Partie A

1) Le coefficient directeur de T est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}}{1 - 0} = \frac{3}{4}$

L'ordonnée à l'origine de T est $\frac{1}{2}$

Donc T a pour équation $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

2) Il semble que f est convexe sur $]-\infty ; 0]$ et que f est concave sur $[0 ; +\infty[$. f est convexe lorsque $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

Partie B

1) $f(x) = \frac{1}{1+e^{-3x}}$ $\quad f = \frac{1}{u}$ avec $u(x) = 1 + e^{-3x}$

et $u'(x) = -3e^{-3x}$

$f' = -\frac{u'}{u^2}$ $\quad f'(x) = -\frac{-3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$

$f'(x) = \frac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left.\begin{array}{l} e^{-3x} > 0 \\ 3 > 0 \\ (1+e^{-3x})^2 > 0 \end{array}\right\}$ donc $f'(x) > 0$

3) a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} -3x = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0 \end{array}\right\}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-3x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1+e^{-3x}} = 1$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} -3x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty \end{array}\right\}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-3x} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (1+e^{-3x}) = +\infty$

et par inverse $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{1+e^{-3x}} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ donc $\mathcal{C}_f$ a une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ donc $\mathcal{C}_f$ a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$

Partie C

1) T a pour équation $y = f(0) + f'(0)(x-0)$

On a $f(0) = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$ $f'(0) = \frac{3 \times e^0}{(1+e^0)^2}$ $f'(0) = \frac{3}{2^2}$

$f'(0) = \frac{3}{4}$

Donc T a pour équation $\underline{y = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\left.\begin{array}{l} 9 > 0 \\ e^{-3x} > 0 \\ (1+e^{-3x}) > 0 \text{ donc } (1+e^{-3x})^3 > 0 \end{array}\right\}$ donc $f''(x)$ est du signe de $e^{-3x} - 1$

On résout $e^{-3x} - 1 > 0$
$e^{-3x} > 1$
$e^{-3x} > e^0$
$-3x > 0$
$x < 0$

Donc le tableau de signe de f'' est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de f''		$+$	0	$-$	

3) a) La fonction f est convexe lorsque $f''(x) \geqslant 0$.
Donc f est convexe sur $]-\infty ; 0]$.

b) Le point A a pour abscisse 0.
Or on voit que f'' s'annule en changeant de signe pour $x = 0$
Donc A est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

c) On sait qu'une courbe convexe a ses tangentes en-dessous d'elle.
Mais une courbe concave a ses tangentes au-dessus.
Donc la tangente T est $\left|\begin{array}{l}\text{en-dessous de } \mathcal{C}_f \text{ quand } x \leqslant 0 \\ \text{au-dessus de } \mathcal{C}_f \text{ quand } x \geqslant 0\end{array}\right.$

Exercice 3

1) $u_1 = \frac{6u_0+2}{u_0+5}$ $u_1 = \frac{6\times 8+2}{8+5}$ $u_1 = \frac{50}{13}$

2) a) $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 6x+2$ $u'(x) = 6$
$v(x) = x+5$ $v'(x) = 1$

$f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ $f'(x) = \frac{6(x+5)-(6x+2)(1)}{(x+5)^2}$

$f'(x) = \frac{6x+30-6x-2}{(x+5)^2}$ $f'(x) = \frac{28}{(x+5)^2}$

• Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $\left.\begin{array}{l} 28>0 \\ (x+5)^2>0 \end{array}\right\}$ donc $f'(x)>0$
donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

On a $f(2) = \frac{6(2)+2}{2+5}$ $f(2) = 2$
Puisque f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$
si $x>2$
alors $f(x)>2$.

b) Soit la proposition $u_n > 2$ à démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Initialisation
Pour $n=0$ on a $u_0 = 8$. Donc $u_0 > 2$
la propriété est vraie au rang $n=0$.

• Hérédité
Supposons que $u_k > 2$ où k est un certain entier.
$f(u_k) > f(2)$ car f est croissante sur $[0;+\infty[$
$u_{k+1} > 2$
la propriété est héréditaire.

• Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) a) Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$

On a démontré que $u_n > 2$ donc $0 > 2 - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On peut aussi déduire que $u_n + 1 > 2+1$
$u_n + 1 > 3$ donc $u_n + 1 > 0$
et enfin on déduit que $u_n + 5 > 2+5$
$u_n + 5 > 7$ donc $u_n + 5 > 0$

En utilisant la règle des signes d'un produit et d'un quotient,
on déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc $u_{n+1} < u_n$. (u_n) est décroissante

b) $\left.\begin{array}{l} \text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante} \\ \text{la suite } (u_n) \text{ est minorée par } 2 \end{array}\right\}$ donc (u_n) est convergente.