Dans un repère orthonormé (O, I, J, K), on considère les points
$N\,(-5\,;-4\,;4)$
$P\,(-5\,;-4\,;-7)$
$V\,(15\,;32\,;-6)$
$W\,(5\,;14\,;-6)$

Un point L se déplace sur la droite (NP) dans le sens de N vers P
Un point M se déplace sur la droite (VW) dans le sens de V vers W
À l'instant $t = 0$ le point L est en N et le point M est en V.
On note L_t et M_t les positions des points L et M au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.

On admet que L_t et M_t ont pour coordonnées $(-5\,;-4\,;4-11t)$ et $(15-10t\,;32-18t\,;-6)$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes. La droite (NP) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?

○ (OK)

○ (OJ)

○ (OI)

Valider ✔

$\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix} -5-(-5) \\ -4-(-4) \\ -7-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{NP} = 0\vec{i} + 0\vec{j} - 11\vec{k}$
$\overrightarrow{NP}$ est colinéaire à $\vec{k}$
donc <u>(NP) est parallèle à (OK)</u>

La droite (VW) se trouve dans un plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK), (OJK). Lequel ?

○ (OJK)

○ (OIK)

○ (OIJ)

Valider ✔

$\overrightarrow{VW}\begin{pmatrix} 5-15 \\ 14-32 \\ -6-(-6) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{VW}\begin{pmatrix} -10 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{VW} = -10\vec{i} - 18\vec{j}$
$\overrightarrow{VW}$ est coplanaire avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$
donc (VW) est dans un plan
<u>parallèle à (OIJ)</u>

Quelle est l'équation de ce plan $\mathcal{P}$?

Valider ✔

Un plan parallèle à (O I J) a pour équation z = constante

Or $\mathcal{P}$ contient le point V de cote -6

Donc $\mathcal{P}$ a pour équation $\underline{z=-6}$.

Quelles sont les coordonnées du point d'intersection entre la droite (NP) et le plan $\mathcal{P}$?

Valider ✔

Puisque la droite (NP) est parallèle à (OK), tous les points de (NP) possèdent la même abscisse $x=-5$ et la même ordonnée $y=-4$ que N et P.

De plus le point d'intersection de (NP) avec $\mathcal{P}$ est dans le plan $\mathcal{P}$. Donc sa cote est $z=-6$. Conclusion : $\underline{(-5\,;-4\,;-6)}$

Les droites (NP) et (VW) sont-elles sécantes ?

○ **Oui**

○ **Non**

Valider ✔

Puisque la droite (VW) est dans le plan $\mathcal{P}$, si elle est sécante à la droite (NP), alors c'est au point de coordonnées $(-5\,;-4\,;-6)$. Appelons T ce point.

Examinons si ce point $T(-5\,;-4\,;-6)$ est sur (VW)

On a $\overrightarrow{VW}\begin{pmatrix}-10\\-18\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{VT}\begin{pmatrix}-5-15\\-4-32\\-6-(-6)\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{VT}\begin{pmatrix}-20\\-36\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{VW}$ et $\overrightarrow{VT}$ sont-ils colinéaires ? On a $\overrightarrow{VT}=2\overrightarrow{VW}$, donc $\overrightarrow{VW}$ et $\overrightarrow{VT}$ sont colinéaires. Donc $T\in(VW)$. Donc la réponse est <u>oui</u>

Calculer l'expression de $L_tM_t{}^2$ en fonction de t.

On donnera la réponse sous une forme développée et réduite.

Valider ✔

$$L_tM_t^2 = (x_{M_t} - x_{L_t})^2 + (y_{M_t} - y_{L_t})^2 + (z_{M_t} - z_{L_t})^2$$

$$L_tM_t^2 = (15-10t-(-5))^2 + (32-18t-(-4))^2 + (-6-(4-11t))^2$$

$$L_tM_t^2 = (20-10t)^2 + (36-18t)^2 + (-10+11t)^2$$

$$L_tM_t^2 = 10^2(2-t)^2 + 18^2(2-t)^2 + (11t-10)^2$$

$$L_tM_t^2 = (100+324)(2-t)^2 + (121t^2-220t+100)$$

$$L_tM_t^2 = 424(4-4t+t^2) + 121t^2 - 220t + 100$$

$$L_tM_t^2 = 1696 - 1696t + 424t^2 + 121t^2 - 220t + 100$$

$$L_tM_t^2 = 545t^2 - 1916t + 1796$$

À quel instant t la longueur L_tM_t est-elle minimale ?

On donnera directement la valeur de t avec une précision de 10^{-2}.

Valider ✔ Suivant ▶

$545 > 0$ donc le trinôme

$545t^2 - 1916t + 1796$ présente un minimum.

Le minimum a lieu pour $t = \frac{-b}{2a}$ $\quad t = \frac{-(-1916)}{2(545)} = \frac{1916}{1090} = 1.76$

arrondi à 10^{-2} près