CHAPITRE 2 : Continuité, dérivabilité et étude de fonctions

CHAPITRE 2 : Continuité, dérivabilité et étude de fonctions

1 Langage de la continuité

1.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

➢ Dire que f est continue en a signifie que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

➢ Dire que f est continue sur I signifie que f est continue en tout réel de I.

1.2 Illustration graphique

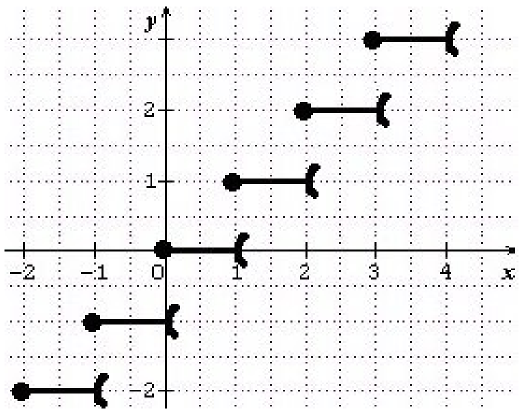
Lorsqu'une fonction est continue sur un intervalle I, sa représentation graphique sur I peut être tracée sans lever le crayon.

<u>Contre-exemple</u> :

La partie entière d'un réel x, notée $E(x)$, est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Exemples : $E(2{,}4) = 2$ $E(\pi) = 3$ $E\left(-\frac{1}{4}\right) = -1$

E est la fonction qui, à tout réel x, associe l'unique **entier relatif** n tel que $n \leq x < n + 1$



La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Preuve :

$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} E(x) = 1$ $E(2) = 2$ $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} E(x) \neq E(2)$ Donc E n'est pas continue en 2

1.3 Fonctions usuelles

➢ Les fonctions polynômes, valeur absolue, sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

➢ La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$.

➢ Les fonctions construites par opération ou par composition à partir des précédentes sont continues sur leur ensemble de définition. (***Ex*** : les fonctions rationnelles)

2 Théorème des valeurs intermédiaires

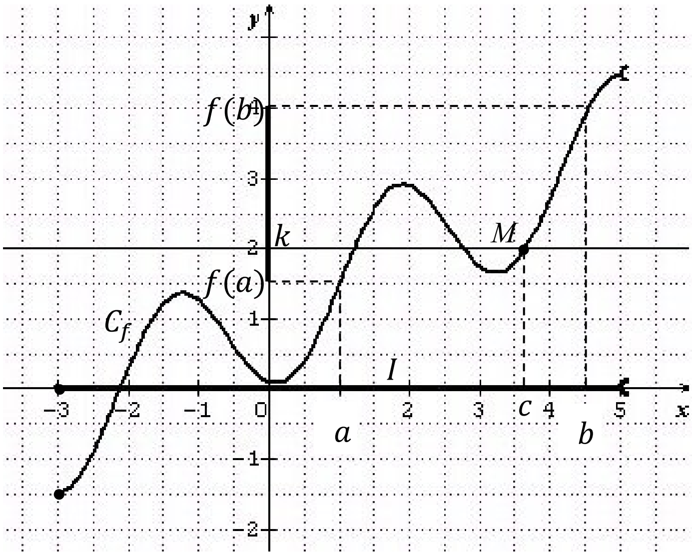
2.1 Enoncé

- Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I, a et b deux réels de I.
- Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins un** réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

2.2 Interprétation graphique

Soit C_f la courbe représentative de f.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et (b) , la droite d'équation $y = k$ coupe **au moins une fois** la courbe C_f en un point d'abscisse c comprise entre a et b.



2.3 Condition suffisante pour qu'une fonction f soit une bijection

Si une fonction f est continue et strictement croissante sur un intervalle $[a; b]$ alors la fonction f est une bijection de $[a; b]$ vers $[f(a); f(b)]$

Si une fonction f est continue et strictement décroissante sur un intervalle $[a; b]$ alors la fonction f est une bijection de $[a; b]$ vers $[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}); \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]$

2.4 Corollaire[1] du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet **une solution unique** dans $[a; b]$

Remarque : ce corollaire est aussi appelé **« théorème de bijection ».**

Démonstration *:* avec f strictement croissante sur $[a; b]$.

- f *est* une fonction continue sur $[a; b]$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c dans $[a; b]$.
- Montrons que cette solution c est unique.

Soit x un réel de $[a; b]$, $x \neq c$.

On a soit $> c$, soit $x < c$. f étant strictement croissante sur $[a; b]$, si $x > c$ alors $f(x) > f(c)$

et si $x < c$ alors $f(x) < f(c)$

Donc si $x \neq c$, on a $f(x) \neq f(c)$.

D'où c est l'unique solution dans l'intervalle $[a; b]$ de l'équation $f(x) = k$.

2.5 Extension

Le théorème de bijection s'étend au cas où f est continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, c'est-à-dire sur des intervalles du type $]a; b[$, $[a; b[$, $[a; +\infty[$ …

3 Fonctions dérivables

3.1 Nombre dérivé, fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

➢ a et $a + h$ sont deux réels de l'intervalle I avec $h \neq 0$.

Dire que f est dérivable en a signifie que $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l \ avec\ l \in \mathbb{R}$

l est le nombre dérivé de la fonction f calculé en $x = a$. On note $f'(a) = l$.

[1] Corollaire : Proposition qui se déduit immédiatement d'une proposition déjà démontrée

- Dire que f est dérivable sur I signifie que f est dérivable en tout x de I.

  La fonction dérivée, notée f' , est la fonction : $x \longmapsto f'(x)$

Interprétation graphique de « f est dérivable en a » :

Soit C_f la courbe représentative de f dans un repère.

La tangente T_a à C_f au point d'abscisse a a pour coefficient directeur $f'(a)$.

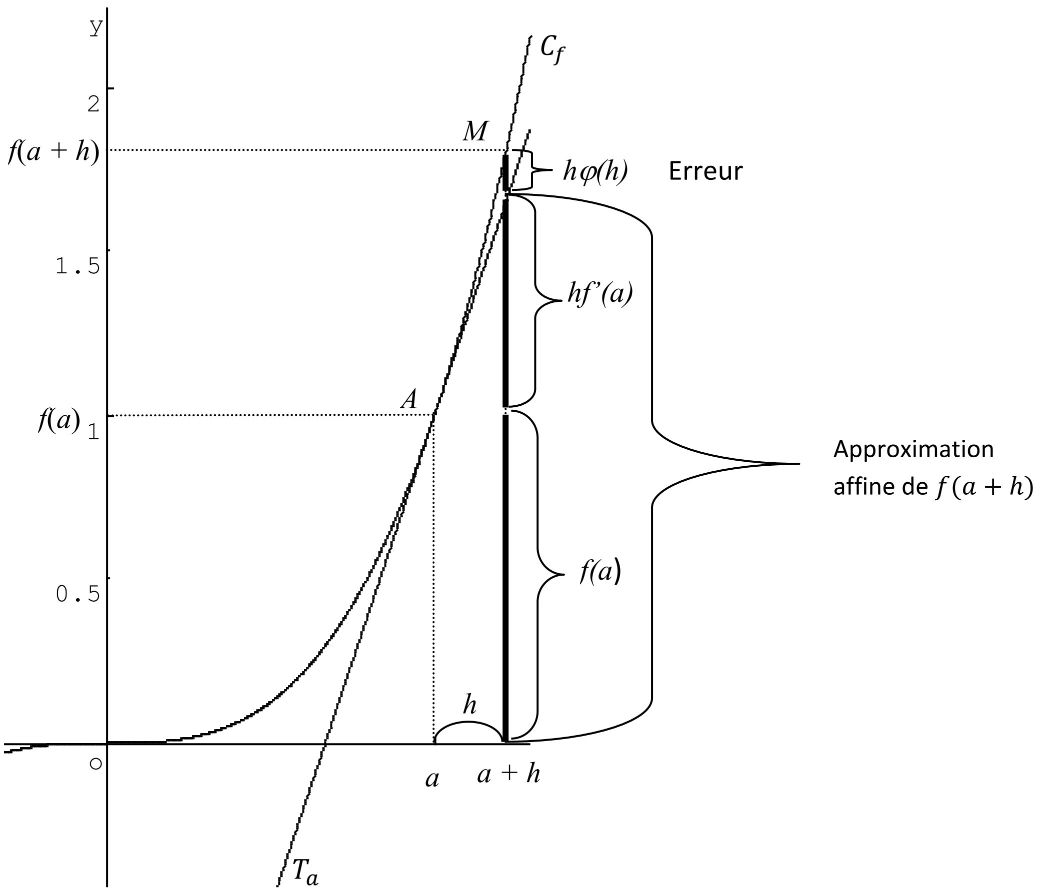
Interprétation numérique de « f est dérivable en a » :

Pour tout réel h tel que $a + h$ appartienne à I, on a l'égalité :

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + h.\varphi(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0}$$

On dit que $f(a) + h.f'(a)$ est l'approximation affine de $f(a + h)$ pour h proche de 0.

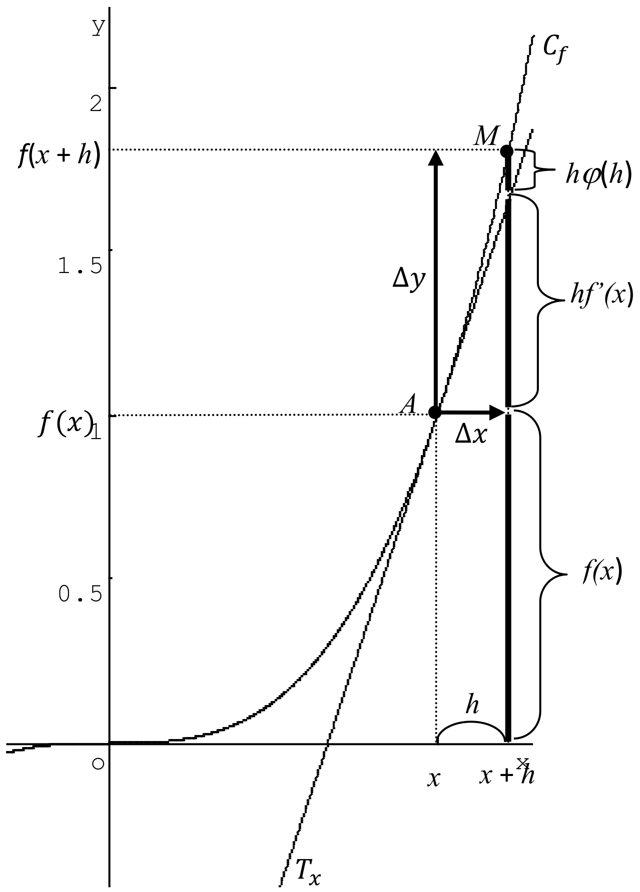
On note $f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a)$.



3.2 Ecriture différentielle

Soit f une fonction définie sur I, x un réel de I et f une fonction dérivable en x.

Pour tout réel h tel que $x + h \in I$, $f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + h.\varphi(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$



On peut utiliser les notations suivantes :

- L'accroissement des antécédents $\Delta x = (x+h) - x$
- L'accroissement des images $\Delta y = f(x+h) - f(x)$

On a donc $\Delta x = h$ et $h.\varphi(h) = \Delta x.\varphi(\Delta x)$ $\lim_{h \to 0} h.\varphi(h) = 0$ s'écrit $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x.\varphi(\Delta x) = 0$

Avec ces notations, l'égalité $f(x+h) - f(x) = h.f'(x) + h.\varphi(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$

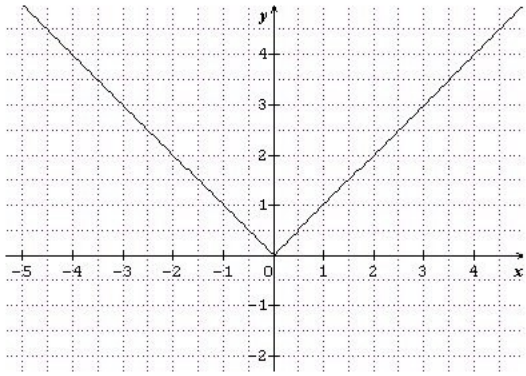
peut s'écrire : $\Delta y = \Delta x.f'(x) + \Delta x.\varphi(\Delta x)$ avec $\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = 0$

- Lorsque h tend vers 0, Δy et Δx tendent vers 0. Ils deviennent infinitésimaux[2]. On les note alors dy et dx. De plus, $\Delta x.\varphi(\Delta x)$ devient alors négligeable devant dy et dx.

L'égalité s'écrit donc $dy = dx.f'(x)$. C'est l'écriture différentielle de l'égalité. On note aussi $f' = \frac{df}{dx}$

[2] Infinitésimal : Extrêmement petit

3.3 Dérivabilité et continuité



Soit f une fonction définie sur I et a un réel de I. **Si** f est **dérivable** en a, **alors** f est **continue** en a. **Si** f est **dérivable** sur I, **alors** f est **continue** sur I.

La réciproque est fausse.

Exemple : Etude de la fonction $f: x \mapsto |x|$ en $x = 0$

- Etude de la continuité en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et $f(0) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Donc **la fonction valeur absolue est continue en 0**.

- Etude de la dérivabilité en 0 : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h}$

Si $h < 0$ alors $|h| = -h$ et $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{-h}{h} = -1$

Si $h > 0$ alors $|h| = h$ et $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{h}{h} = 1$

Conclusion : $-1 \neq 1$ donc $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \neq \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$.

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ n'existe pas.

Donc **la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0**.

3.4 Dérivation d'une fonction composée.

Rappel : on note $f \circ u$ la fonction u suivie de la fonction f

$$f \circ u \begin{cases} I & \to & J & \to & K \\ x & \mapsto & u(x) & \mapsto & f[u(x)] \\ x+h & \mapsto & u(x+h) & \mapsto & f[u(x+h)] \end{cases}$$

On suppose que pour tout réel h tel que $x + h \in I$, on ait $u(x+h) \in J$.

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur un intervalle J.

Alors la fonction $f \circ u$ est dérivable sur I

<u>Cas particuliers à connaitre</u> :

$I \to J \to K$ $x \mapsto u(x) = ax+b \mapsto f[ax+b]$	Si pour tout $x \in I$, f est dérivable en $ax+b$, alors $f \circ u$ est dérivable sur I	$(f \circ u)'(x) = a \times f'(ax+b)$
$I \to J \to K$ $x \mapsto u(x) \mapsto \sqrt{[u(x)]}$	Si pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$ alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I	$\left(\sqrt{u}\right)'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$I \to J \to K$ $x \mapsto u(x) \mapsto [u(x)]^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$	Si pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$ alors u^n est dérivable sur	$(u^n)'(x) = n \ u^{n-1}(x) \ u'(x)$

	I	

Exemple 1 :

Soit f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{5x-2}$.

$$f\begin{cases}[1;+\infty[& \to &]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 5x-2 & \mapsto & \sqrt{5x-2}\end{cases}$$

$f=\sqrt{u}$ avec $u(x)=5x-2$ et $x\in[1;+\infty[$

u est dérivable sur $[1;+\infty[$ et $u'(x)=5$

- Si $\in[1;+\infty[$, alors $x\geq 1$ donc $5x-2\geq 3$ donc $5x-2\in]0;+\infty[$ soit $u(x)\in]0;+\infty[$

  La fonction racine carrée est dérivable sur] 0 ; +∞[

Donc pour tout x de $[1;+\infty[$, $f'(x)=5\times\frac{1}{2\sqrt{5x-2}}$ soit $\boldsymbol{f'(x)=\frac{5}{2\sqrt{5x-2}}}$.

Exemple 2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(x^3-3x^2+1\right)^4$

f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminons sa fonction dérivée : $f(x)=u^4(x)$ avec $u(x)=x^3-3x^2+1$

$$f'(x)=4\,u^3(x)\,.\,u'(x)$$

$$f'(x)=4\left(x^3-3x^2+1\right)^3\left(3x^2-6x\right)$$

4 Fonctions cosinus et sinus

4.1 Dérivée des fonctions cosinus et sinus

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$

On admet que :

$$(cos)'(x)=-\sin(x) \quad \text{et} \quad (sin)'(x)=\cos(x)$$

Propriété :

Comme la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable en $x=0$.

$$(sin)'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h}$$

$$(sin)'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)-0}{h}$$

$$cos(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)-0}{h}$$

$$1 = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h}$$

4.2 Propriétés des fonctions sinus et cosinus

4.2.1 Parité.

La fonction cosinus est une **fonction paire**, en effet :

- Elle est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.
- $cos\ (-x) = cos\ (x)$ pour tout réel x.

La fonction sinus est une **fonction impaire**, en effet :

- Elle est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.
- $sin\ (-x) = -sin\ (x)$ pour tout réel x.

4.2.2 Périodicité.

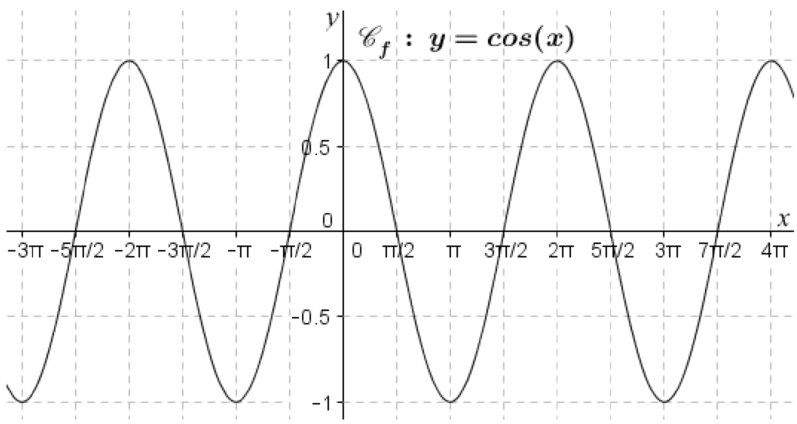
La fonction cosinus est **périodique** de période $T = 2\pi$, en effet :

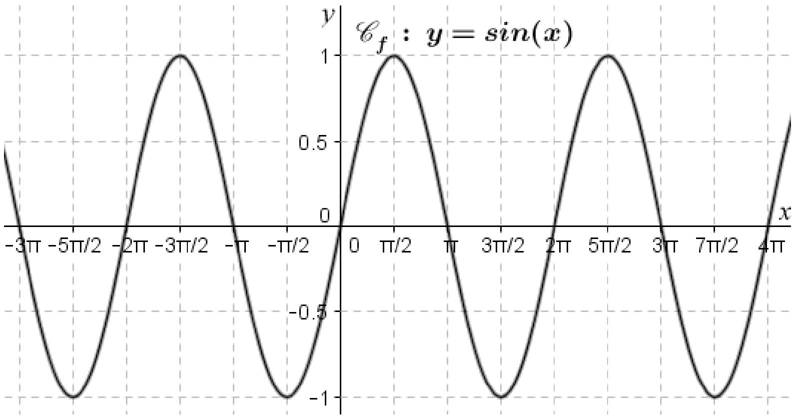
$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, cos\ (x + 2\pi) = cos\ (x).$$

La fonction sinus est **périodique** de période $T = 2\pi$, en effet :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, sin\ (x + 2\pi) = sin\ (x).$$

4.3 Représentation graphique des fonctions cosinus et sinus.




y
$\mathscr{C}_f$: $y = sin(x)$
1
0.5
0
-0.5
-1
x
-3π -5π/2 -2π -3π/2 -π -π/2 0 π/2 π 3π/2 2π 5π/2 3π 7π/2 4π