CHAPITRE 1 : Raisonnement par récurrence, suites et fonctions

CHAPITRE 1 : Raisonnement par récurrence, suites et fonctions

1 Les suites numériques (rappel de première)

1.1 Généralités

- Une suite (U_n) de nombres réels <u>est une fonction</u> où la variable n est un entier naturel.

$$(U_n): \begin{array}{r} \mathbb{N}\ (ou\ une\ partie\ de\ \mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto U_n \end{array}$$

- L'image par la suite (U_n) d'un entier naturel n est notée U_n et se lit « U indice n » ou « U n »
- U_n peut exister pour tout entier naturel n ou pour seulement certains entiers naturels n.
- U_n est le terme général de la suite. C'est un nombre réel.
- L'entier n est le **rang** du terme U_n

1.2 Plusieurs méthodes pour générer une suite

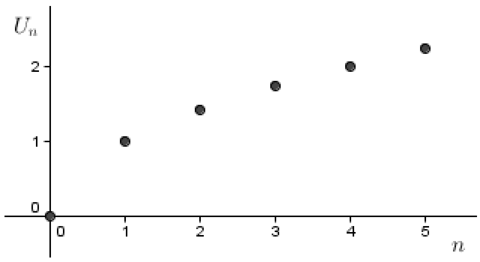
- Le terme général de la suite peut être défini au moyen d'une **fonction de variable n**.

Exemple :

La suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $U_n = \sqrt{n}$.

Dans cet exemple, on a $U_n = f(n)$
avec comme fonction f la fonction racine carrée.

$U_0 = \sqrt{0}$; $U_1 = \sqrt{1}$; $U_2 = \sqrt{2}$; $U_3 = \sqrt{3}$



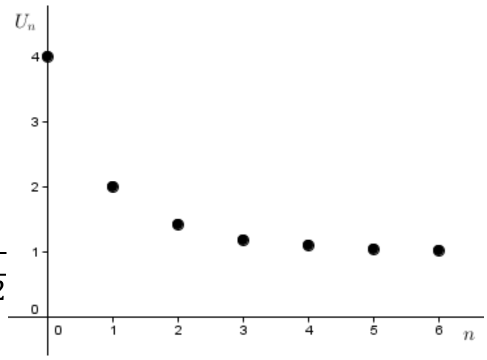
- Le terme général de la suite peut être défini au moyen d'une **relation de récurrence** qui donne le terme suivant en fonction du terme (ou des termes) précédent et parfois aussi de n.

Exemple :

La suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Dans cet exemple, on a $U_{n+1} = f(U_n)$
avec comme fonction f la fonction racine carrée.

$U_0 = 4$; $U_1 = \sqrt{U_0} = 2$; $U_2 = \sqrt{U_1} = \sqrt{2}$; $U_3 = \sqrt{U_2} = \sqrt{\sqrt{2}}$



Remarque :

On aurait tout aussi bien pu définir la suite de l'exemple précédent en écrivant :

La suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_n = \sqrt{U_{n-1}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

2 Exemples d'algorithmes permettant d'obtenir des termes d'une suite (rappel de première)

- Une boucle **Pour** permet de répéter un groupe d'instructions un nombre déterminé de fois

Exemple :

Soit la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $U_n = \sqrt{n}$. Calculer et afficher les N premiers termes de cette suite où N est un entier choisi par l'utilisateur.

Réponse

Déclaration des variables

U est un réel

I et N sont des entiers

Début algorithme

Saisir N

Pour I allant de 0 à N-1

U prend la valeur $\sqrt{\mathrm{I}}$

Afficher U

Fin Pour

Fin algorithme

- Une boucle **Tant que** permet de répéter un groupe d'instructions autant de fois que nécessaire, ce nombre de fois n'étant pas connu à l'avance.

Exemple :

Soit la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

La suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Calculer et afficher le premier terme de cette suite qui est strictement inférieur à $1{,}001$.

Réponse

Déclaration des variables

U est un réel

I et N sont des entiers

Début algorithme

U prend la valeur 4

Tant que U$\geq 1{,}001$

U prend la valeur $\sqrt{\mathrm{U}}$

Fin Tant que

Afficher U

Fin algorithme

3 Suites arithmétiques (rappel de première)

3.1 Définition par une relation de récurrence

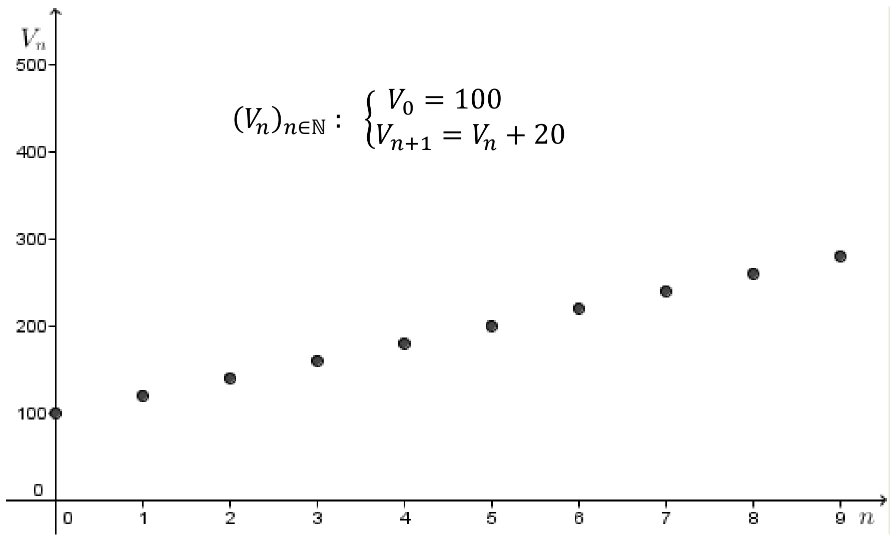
Une suite (U_n) est **arithmétique** si :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} U_0 \ \ est\ donné \\ U_{n+1} = U_n + r \end{cases}$$

r est un réel constant appelé la **raison** de la suite arithmétique.

Exemple :
Un capital de 100 € est placé au début de l'année $n = 0$ sur un compte rémunéré avec un taux annuel d'intérêts simples de 20 %. Cela veut dire que chaque année, le montant des intérêts est le même et vaut 20 % du montant initial c'est-à-dire $\frac{20}{100} \times 100 = 20$€.

On note $V_0 = 100$ la somme sur le compte au début de l'année $n = 0$. La somme au début de l'année $n = 1$ est $V_1 = V_0 + 20$. La somme au début de l'année $n = 2$ est $V_2 = V_1 + 20$ etc.



n		Vn
0	V_0	100
1	V_1	120
2	V_2	140
3	V_3	160
4	V_4	180
5	V_5	200
6	V_6	220
7	V_7	240
8	V_8	260
9	V_9	280

3.2 Définition en fonction de *n* à partir de U_0

Le terme général d'une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r s'exprime par :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = U_0 + nr$$

Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n = V_0 + n \times r$. Donc, $V_n = 100 + n \times 20$
Cette formule en fonction de n permet de calculer directement $V_9 = 100 + 9 \times 20 = 280$ €.

3.3 Définition en fonction de *n* à partir d'un terme U_p

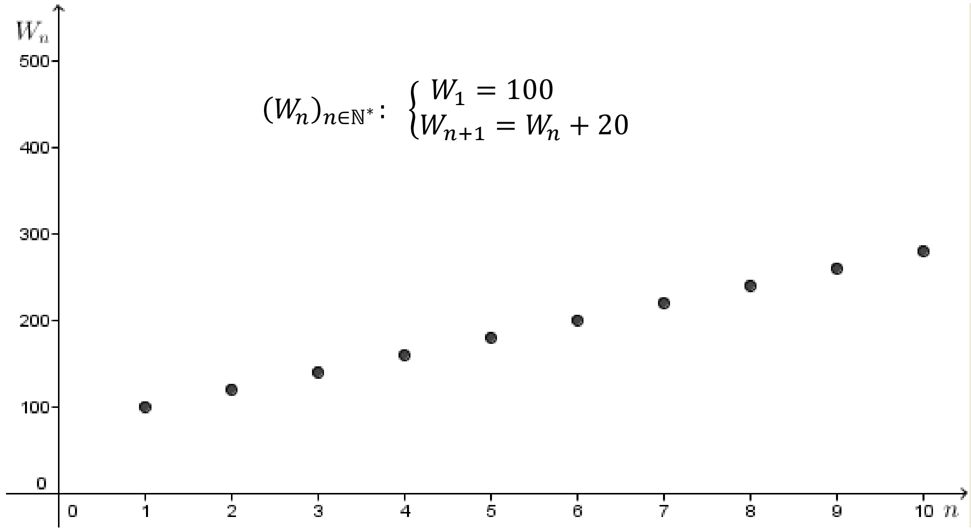
Le terme général d'une suite arithmétique de premier terme U_p et de raison r s'exprime par :
Pour tout $\in \mathbb{N}$, avec $n \geq p$:

$$U_n = U_p + (n - p)r$$

Exemple avec $= \mathbf{1}$. Pour tout $\in \mathbb{N}$, avec $n \geq 1$:

$$U_n = U_{\mathbf{1}} + (n - \mathbf{1})r$$

Exemple :
On reprend les montants annuels sur compte rémunéré à intérêts simples de 20%, mais en notant $W_1 = 100$ le premier terme.



$$(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \begin{cases} W_1 = 100 \\ W_{n+1} = W_n + 20 \end{cases}$$

n		Wn
1	W_1	100
2	W_2	120
3	W_3	140
4	W_4	160
5	W_5	180
6	W_6	200
7	W_7	220
8	W_8	240
9	W_9	260
10	W_{10}	280

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $W_n = W_1 + (n-1) \times r$. $W_n = 100 + (n-1) \times 20$ $W_n = 80 + 20n$
Cette formule en fonction de n permet de calculer directement $W_{10} = 80 + 20 \times 10 = 280$ €.

3.4 Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

La somme S de termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

$$S = \frac{(1^{er}\ terme\ de\ la\ somme +\ dernier\ terme\ de\ la\ somme) \times n^{bre}\ termes\ de\ la\ somme}{2}$$

Exemple avec la suite de l'exemple précédent
Calculer $S = W_3 + W_4 + \cdots + W_9$
C'est la somme de $9 - 3 + 1$ *termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison* 20

$$S = \frac{(W_3 +\ W_9) \times (9 - 3 + 1)}{2} \qquad S = \frac{(140 +\ 260) \times (7)}{2} \qquad S = 1400$$

Exemple à retenir : la somme des entiers naturels de 1 à n
Calculer $S = 1 + 2 + \cdots + n.$
C'est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 1

$$S = \frac{(1 +\ n) \times (n)}{2}$$

Ou encore : $\boxed{S = \frac{n(n+1)}{2}}$

4 Suites géométriques (rappel de première)

4.1 Définition par une relation de récurrence

Une suite (U_n) est **géométrique** si :

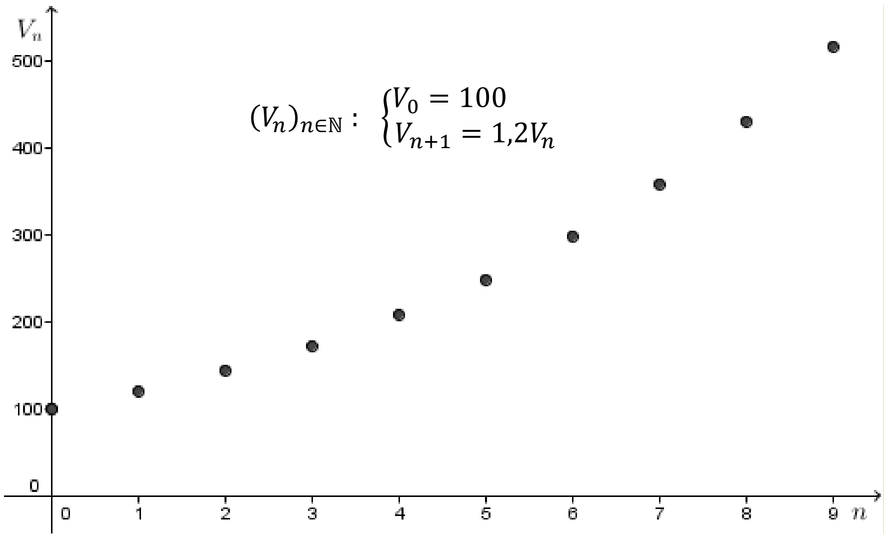
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} U_0 \ \ est\ donné \\ U_{n+1} = U_n \times q \end{cases}$$

q est un réel différent de 0 et de 1, constant, appelé la **raison** de la suite géométrique.

Exemple :
Un capital de 100 € est placé au début de l'année $n = 0$ sur un compte rémunéré avec un taux annuel d'intérêts composés de 20 %. Cela veut dire que chaque année, le montant des intérêts vaut 20 % du montant de l'année précédente.

On note $V_0 = 100$ la somme sur le compte au début de l'année $n = 0$. La somme au début de l'année $n = 1$ est $V_1 = V_0 \times 1{,}20$. La somme au début de l'année $n = 2$ est $V_2 = V_1 \times 1{,}20$ etc.



n		Vn
0	V_0	100
1	V_1	120
2	V_2	144
3	V_3	172.8
4	V_4	207.36
5	V_5	248.83
6	V_6	298.6
7	V_7	358.32
8	V_8	429.98
9	V_9	515.98

4.2 Définition en fonction de *n* à partir de U_0

Le terme général d'une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison q s'exprime par :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = U_0 \times q^n$$

Exemple :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n = V_0 \times q^n$. $V_n = 100 \times 1{,}2^n$

Cette formule en fonction de n permet de calculer directement $V_9 = 100 \times 1{,}2^9 \approx 515{,}98$ €.

4.3 Définition en fonction de n à partir d'un terme U_p

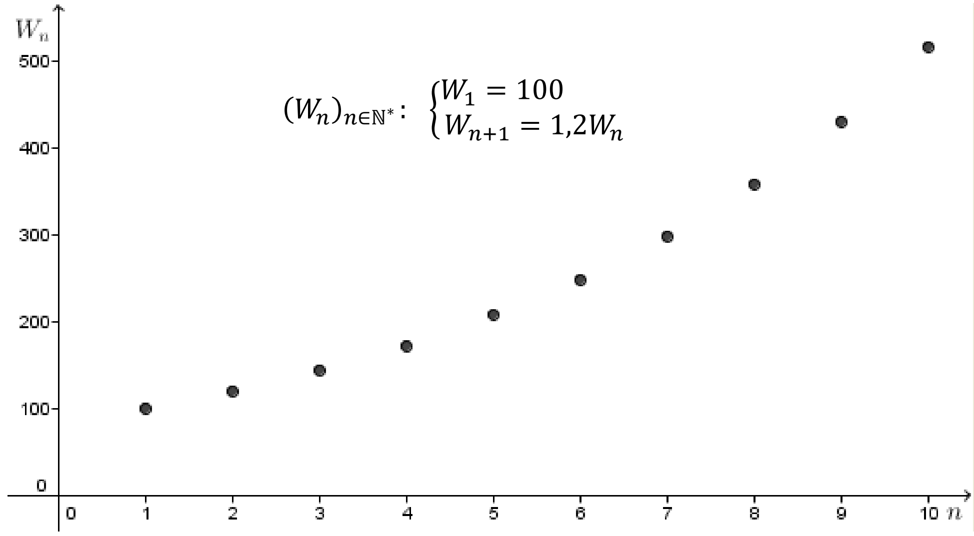
Le terme général d'une suite géométrique de premier terme U_p et de raison q s'exprime par :
Pour tout $\in \mathbb{N}$, avec $n \geq p$:

$$U_n = U_p \times q^{n-p}$$

Exemple avec $\boldsymbol{p = 1}$:
Pour tout $\in \mathbb{N}$, avec $n \geq 1$:

$$U_n = U_{\mathbf{1}} \times q^{n-\mathbf{1}}$$

Exemple :
On reprend les montants annuels sur compte rémunéré à intérêts simples de 20 %, mais en notant $W_1 = 100$ le premier terme.



n		Wn
1	W_1	100
2	W_2	120
3	W_3	144
4	W_4	172.8
5	W_5	207.36
6	W_6	248.83
7	W_7	298.6
8	W_8	358.32
9	W_9	429.98
10	W_{10}	515.98

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $W_n = W_1 \times q^{n-1}$. $\quad W_n = 100 \times 1{,}2^{n-1} \quad W_n = 100 \times 1{,}2^n \times 1{,}2^{-1} \quad W_n = \frac{100}{1{,}2} \times 1{,}2^n \quad W_n = \frac{250}{3} \times 1{,}2^n$

Cette formule en fonction de n permet de calculer directement $W_{10} = \frac{250}{3} \times 1{,}2^{10} \approx 515{,}98$ €.

4.4 Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique est :

$$S = 1^{er}\ terme\ de\ la\ somme \times \frac{1 - q^{n^{bre}\ termes\ de\ la\ somme}}{1 - q}$$

Exemple avec la suite de l'exemple précédent
Calculer $S = W_3 + W_4 + \cdots + W_9$
C'est la somme de $9 - 3 + 1$ *termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison* $1{,}2$

$$S = W_3 \times \frac{1 - 1{,}2^{9-3+1}}{1 - 1{,}2} S = 144 \times \frac{1 - 1{,}2^7}{1 - 1{,}2} S = 144 \times \frac{1{,}2^7 - 1}{1{,}2 - 1} ; S = 720 \times (1{,}2^7 - 1) \approx 1859{,}89$$

⚠ ***Exemple à retenir : la somme des puissances entières d'un réel q différent de 1***
Calculer $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$

$$S = 1 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$ Ou encore : $$\boxed{S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

5 Raisonnement par récurrence

5.1 Le principe

Image de l'échelle : *Si je peux mettre le pied sur le barreau numéro n_o de l'échelle (n_o est un entier naturel donné)* ***et*** *si je peux passer de n'importe quel barreau numéro k ($k \geq n_0$) au barreau suivant numéro $k+1$ alors je peux gravir toute l'échelle à partir du barreau numéro n_o.*

$P(n)$ désigne une proposition[1] qui dépend d'un entier naturel n. Soit n_0 un entier naturel.
Pour démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, la proposition $P(n)$ est vraie, on procède en trois étapes :

(1) **Initialisation :** Vérifier que la proposition $P(n)$ est vraie au rang n_0.

(2) **Hérédité :** On suppose que la proposition $P(n)$ est vraie pour un entier $k \geq n_0$. On montre qu'alors la proposition $P(n)$ est vraie pour l'entier suivant $k+1$.

(3) **Conclusion :** la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

5.2 Exemples

Exemple 1 : Une suite est définie par récurrence. On veut sa définition par une fonction de n.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

Montrer que le terme général de la suite (u_n) s'écrit $u_n = 2^n - 1$ pour tout entier $n \geq 1$.

Réponse

Soit la proposition $P(n)$: « $u_n = 2^n - 1$ pour tout entier $n \geq 1$ »

(1) **Initialisation** : Montrons que $P(n)$ est vraie pour $n = 1$.

D'une part, on sait que $u_1 = 1$.
D'autre part, la proposition $P(n)$ pour $n = 1$ donne $u_1 = 2^1 - 1 = 1$
Donc on a bien $u_{\mathbf{1}} = 2^{\mathbf{1}} - 1$
La proposition $P(n)$ est vraie pour $n = 1$.

(2) **Hérédité :** On suppose que la proposition $P(n)$ soit vraie pour un entier $k \geq 1$, c'est à dire qu'on suppose que $u_{\boldsymbol{k}} = 2^{\boldsymbol{k}} - 1$. Montrons qu'alors $P(n)$ est vraie pour l'entier $k+1$, c'est à dire que $u_{\boldsymbol{k+1}} = 2^{\boldsymbol{k+1}} - 1$.

- On cherche à exprimer u_{k+1}.
  D'après la définition de la suite donnée dans l'énoncé, on a : $u_{k+1} = 2u_k + 1$
- En utilisant l'hypothèse de récurrence[2], on a : $u_{k+1} = 2(2^k - 1) + 1$
$$u_{k+1} = 2^{k+1} - 2 + 1$$
$$u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$$
- On a obtenu la proposition écrite au rang $k+1$

(3) **Conclusion :** la proposition $P(n)$: $\boldsymbol{u_n = 2^n - 1}$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

---

[1] **Proposition** : Enoncé susceptible d'être vrai ou faux.
[2] **L'hypothèse de récurrence :** c'est la supposition que la proposition est vraie pour un entier *k*

Exemple 2 : On veut démontrer qu'une inégalité est vraie pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$.
Montrer par récurrence que l'inégalité $2^n \geq n^2$ est vraie pour tout entier $n \geq 5$.

Réponse

Soit la proposition $P(n)$: « $2^n \geq n^2$ pour tout entier $n \geq 5$ »

(1) **Initialisation** : Montrons que $P(n)$ est vraie pour $n = 5$.

D'une part, on sait que $2^5 = 32$.
D'autre part, $5^2 = 25$
Donc on a bien $2^5 \geq 5^2$
La proposition $P(n)$ est vraie pour $n = 5$.

(2) **Hérédité :** On suppose que la proposition $P(n)$ soit vraie pour un entier $k \geq 5$, c'est à dire qu'on suppose que $2^{\boldsymbol{k}} \geq \boldsymbol{k}^2$. Montrons qu'alors $P(n)$ est vraie pour l'entier $k+1$, c'est à dire que $2^{\boldsymbol{k+1}} \geq (\boldsymbol{k}+\mathbf{1})^2$.

Etablissons d'abord un résultat préliminaire : $k^2 \geq 2k+1$ pour tout entier naturel $k \geq 5$

Cela revient à montrer que : $k^2 - 2k - 1 \geq 0$ pour tout entier naturel $k \geq 5$

Etudions le signe du polynôme $f(x) = x^2 - 2x - 1$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-1)$$
$$\Delta = 8$$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times 1}$$
$$x_1 = 1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x) = x^2 - 2x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Or, $1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41$

donc $k^2 - 2k - 1 \geq 0$ pour tout entier naturel $k \geq 5$

d'où le résultat préliminaire : $k^2 \geq 2k + 1$ pour tout entier naturel $k \geq 5$

On peut maintenant démontrer l'hérédité :

- On cherche à exprimer 2^{k+1}.

$$2^{k+1} = \underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2 \times 2}_{k+1\, fois}$$

$$2^{k+1} = \underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{k\ fois} \times 2$$

$$2^{k+1} = 2^k \times 2$$

- En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a : $2^k \geq k^2$

$$2^k \times 2 \geq k^2 \times 2$$

$$2^{k+1} \geq k^2 \times 2$$

$$2^{k+1} \geq k^2 + \boldsymbol{k^2}$$

Puisque, d'après le résultat préliminaire, $\boldsymbol{k^2} \geq \boldsymbol{2k+1}$ alors on a :

$$k^2 + k^2 \geq k^2 + 2k + 1$$

$$2^{k+1} \geq k^2 + 2k + 1$$

$$2^{k+1} \geq (k+1)^2$$

- On a obtenu la proposition écrite au rang $k+1$

(3) **Conclusion :** la proposition $P(n)$: $2^n \geq n^2$ est vraie pour tout entier $n \geq 5$.

6 Sens de variation d'une suite

6.1 Suite croissante

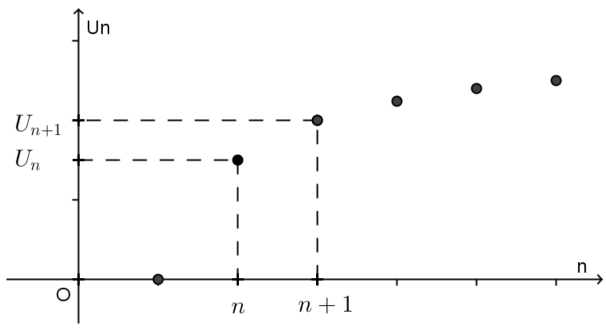
Définition :

La suite (U_n) est croissante si, pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$.

Exemple de suite ***croissante***

La suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$U_n = 3 - \frac{3}{n}$



6.2 Suite décroissante

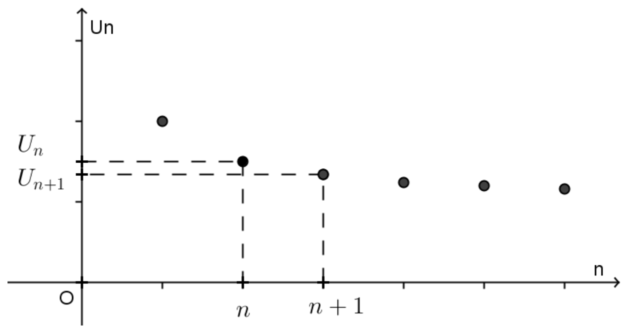
Définition :

La suite (U_n) est décroissante si, pour tout n, $u_{n+1} \leq u_n$.

Exemple de suite ***décroissante***

La suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$U_n = 1 + \frac{1}{n}$



6.3 Suite constante

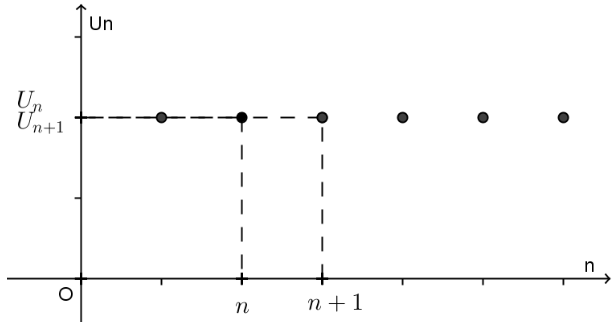
Définition :

La suite (U_n) est constante si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n$.

Exemple de suite ***constante***

La suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = 2$$



6.4 Suite monotone

Définition :

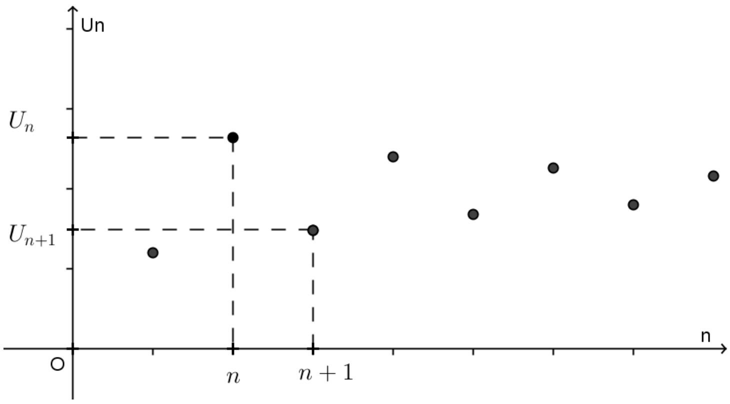
Une suite (U_n) est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante, autrement dit, si elle ne change pas de sens de variation.

Exemple de suite ***non monotone***

La suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = 2 + (-0{,}8)^n$$

$U_1 = 2 + (-0{,}8)^1 = 2 - 0{,}8$
$U_2 = 2 + (-0{,}8)^2 = 2 + 0{,}8^2$
$U_3 = 2 + (-0{,}8)^3 = 2 - 0{,}8^3$
$U_4 = 2 + (-0{,}8)^4 = 2 + 0{,}8^4$ ...



6.5 Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on peut :

6.5.1 Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n.

Le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$ donne le sens de variation de la suite (U_n).

Exemple :

Etudier le sens de variation de la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = 3 - \frac{3}{n}$$

Réponse :

$$U_{n+1} = 3 - \frac{3}{n+1}$$

$$U_{n+1} - U_n = 3 - \frac{3}{n+1} - \left(3 - \frac{3}{n}\right)$$

$$U_{n+1} - U_n = 3 - \frac{3}{n+1} - 3 + \frac{3}{n}$$

$$U_{n+1} - U_n = -\frac{3}{n+1} + \frac{3}{n}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-3}{n+1} + \frac{3}{n}$$

Pour étudier le signe de cette expression, on la met sous la forme de produits et de quotients de facteurs :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-3n}{(n+1)n} + \frac{3(n+1)}{n(n+1)}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-3n + 3(n+1)}{n(n+1)}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-3n + 3n + 3}{n(n+1)}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3}{n(n+1)}$$

$Pour\ tout\ n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} 3 > 0 \\ n > 0 \\ n+1 > 0 \end{cases}$ donc

$$U_{n+1} - U_n > 0$$

$$U_{n+1} > U_n$$

<u>Conclusion :</u>
La suite (U_n) est monotone croissante.

Remarque :
Cette méthode peut être utilisée pour les suites définies par une fonction de n ou pour les suites définies par récurrence.

6.5.2 Etudier le sens de variation de la fonction f sur [0 ; +∞[

Si la suite est définie au moyen d'une fonction de variable n, alors le sens de variation de la suite <u>est le même</u> que celui de la fonction.

Exemple :
Etudier le sens de variation de la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = 3 - \frac{3}{n}$$

Réponse :

$U_n = f(n)$ en posant f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 3 - \frac{3}{x}$.

f est la somme et le quotient de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ et le dénominateur ne s'annule pas sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc f est dérivable sir $]0\ ;\ +\infty[$.

$$f(x) = 3 - 3 \times \frac{1}{x}$$

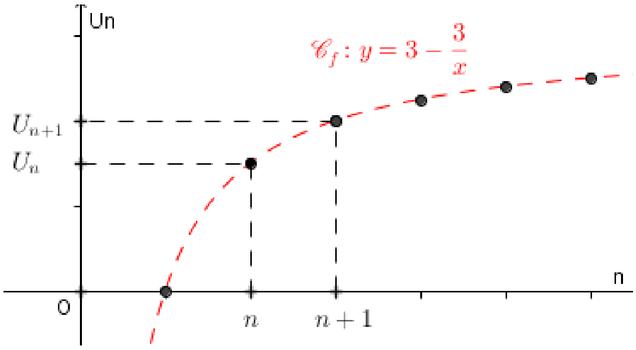
$$f'(x) = 0 - 3 \times -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{x^2}$$

Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) > 0$. Donc la fonction f est croissante.

<u>Conclusion :</u>

La suite (U_n) est monotone croissante



⚠ **Si la suite est définie au moyen d'une relation de récurrence** cette méthode <u>ne peut pas</u> être utilisée.

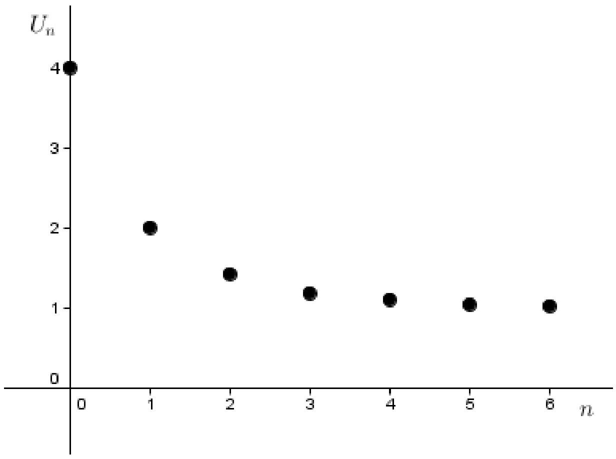
Exemple :
Les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ respectivement par :

$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_0 = 0{,}5 \\ V_{n+1} = \sqrt{V_n} \end{cases}$$

ont-elles le même sens de variation ?

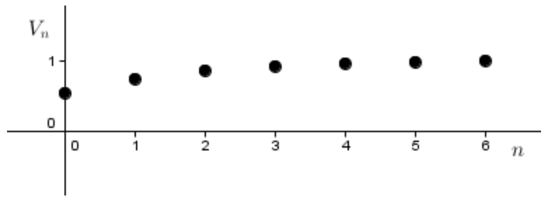
Réponse
En calculant les premiers termes de (U_n), on a :

$U_0 = \mathbf{4}$
$U_1 = \sqrt{4} = \mathbf{2}$
$U_2 = \sqrt{2} \approx \mathbf{1,41}$
$U_3 \approx \sqrt{1{,}41} \approx \mathbf{1,19}$



En calculant les premiers termes de (V_n), on a :

$V_0 = \mathbf{0,5}$
$V_1 = \sqrt{0,5} \approx \mathbf{0,71}$
$V_2 = \sqrt{0,71} \approx \mathbf{0,84}$
$V_3 = \sqrt{0,84} \approx \mathbf{0,92}$



<u>Conclusion :</u> Bien que les deux suites (U_n) et (V_n) soient définies en utilisant la même fonction racine carrée f (strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$), elles n'ont pas le même sens de variation.

⚠ Donc le sens de variation d'une suite définie par $U_{n+1} = f(U_n)$ n'est pas toujours le même que le sens de variation de la fonction f.

6.5.3 Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, comparer u_{n+1} / u_n avec 1

Exemple :

Etudier le sens de variation de la suite :

$$(V_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} V_0 = 100 \\ V_{n+1} = 1{,}2V_n \end{cases}$$

❖ On montre d'abord que tous les termes V_n de la suite sont strictement positifs.

Soit la proposition $P(n)$: « $V_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(1) **Initialisation** : Montrons que $P(n)$ est vraie pour $n = 0$.

On sait que $V_0 = 100$.
Donc on a bien $\boldsymbol{V_0} > 0$
La proposition $P(n)$ est vraie pour $n = 0$.

(2) **Hérédité :** On suppose que la proposition $P(n)$ soit vraie pour un entier $k \geq 0$, c'est à dire qu'<u>on suppose </u>que $\boldsymbol{V_k} > 0$. Montrons qu'alors $P(n)$ est vraie pour l'entier $k + 1$, c'est à dire que $\boldsymbol{V_{k+1}} > 0$.

- On cherche à exprimer V_{k+1}.
  D'après la définition de la suite donnée dans l'énoncé, on a :$V_{k+1} = 1{,}2V_k$
- En utilisant l'hypothèse de récurrence[3], on a : $V_k > 0$

  Or $1{,}2 > 0$

  Donc $1{,}2 \times V_k > 0$

  D'où $V_{k+1} > 0$
- On a obtenu la proposition écrite au rang $k + 1$

(3) **Conclusion :** la proposition $P(n)$: $\boldsymbol{V_n} > 0$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

❖ Comparons maintenant $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ et 1

[3] **L'hypothèse de récurrence :** c'est la supposition que la proposition est vraie pour un entier *k*

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1{,}2V_n}{V_n}$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 1{,}2$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} > 1$$

Puisqu'on a démontré *au préalable* que $V_n > 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$V_n \times \frac{V_{n+1}}{V_n} > V_n \times 1$$

(L'ordre est conservé lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un réel strictement positif)

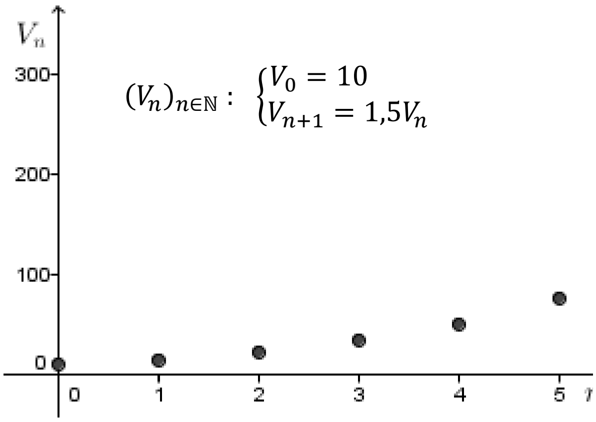
$$V_{n+1} > V_n \ \ pour\ tout\ n \in \mathbb{N}$$

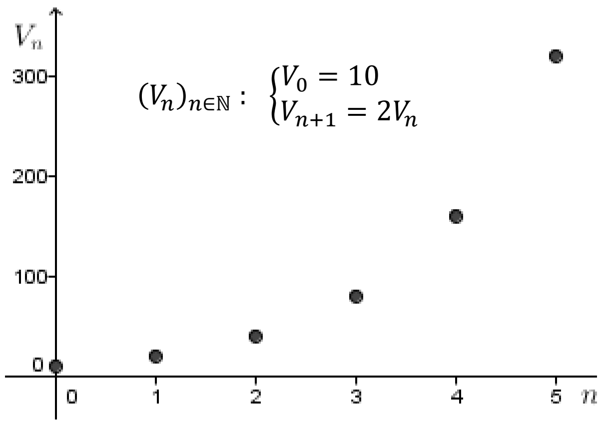
Conclusion : La suite (v_n) est monotone croissante

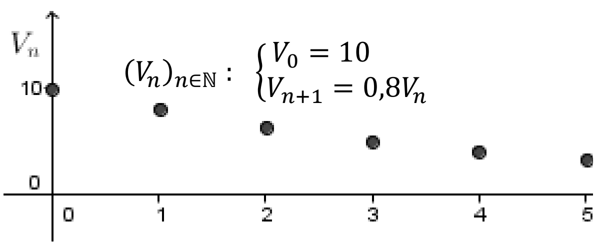
Remarque

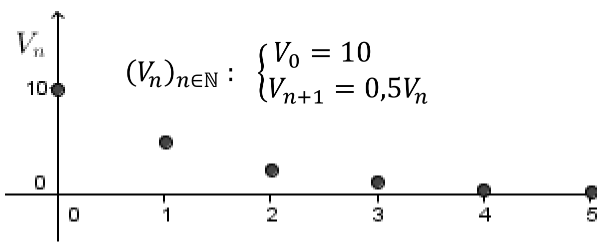
Par cette même méthode, on peut montrer que tout suite géométrique de **premier terme V_0 strictement positif** est :

- Monotone croissante lorsque $q > 1$
- Monotone décroissante lorsque $0 < q < 1$









6.5.4 Utiliser un raisonnement par récurrence

Pour utiliser la récurrence, on doit d'abord conjecturer le sens de variation.

Exemple :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1{,}01 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 \end{cases}$$

Réponse

- On calcule u_1 pour pouvoir conjecturer le sens de variation de la suite.

$$u_1 = (u_0)^2$$
$$u_1 = 1{,}01^2$$
$$u_1 = 1{,}0201$$
$$u_1 > u_0$$

Donc on conjecture la suite (u_n) est monotone croissante.

- Démonstration par récurrence du sens de variation

Soit la proposition $P(n)$: $u_{n+1} > u_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(1) **Initialisation** : Montrons que $P(n)$ est vraie pour $n = 0$.

On sait que $u_0 = 1{,}01$ et que $u_1 = 1{,}0201$.
Donc on a bien $u_1 > u_0$
La proposition $P(n)$ est vraie pour $n = 0$.

(2) **Hérédité :** On suppose que la proposition $P(n)$ soit vraie pour un entier $k \geq 0$, c'est à dire qu'on suppose que $u_{\boldsymbol{k}+1} > u_{\boldsymbol{k}}$. Montrons qu'alors $P(n)$ est vraie pour l'entier $k + 1$, c'est à dire que $u_{\boldsymbol{k+1}+1} > u_{k+1}$
Ou encore que $u_{k+2} > u_{k+1}$

- On cherche à exprimer u_{k+2} et u_{k+1} en fonction, respectivement de u_{k+1} et u_k
D'après la définition de la suite donnée dans l'énoncé, on a : $u_{k+1} = (u_k)^2$

  et d'après la définition de la suite donnée dans l'énoncé, on a aussi : $u_{\boldsymbol{k+1}+1} = (u_{\boldsymbol{k}+1})^2$ c'est-à-dire $u_{\boldsymbol{k+2}} = (u_{\boldsymbol{k}+1})^2$

- En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a : $u_{k+1} > u_k$
Or la fonction carrée est strictement croissante sur $[0 \ ; \ +\infty[$ et puisque[4] $u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\text{Donc } (u_{k+1})^2 > (u_k)^2$$
$$\text{D'où } u_{k+2} > u_{k+1}$$

- On a obtenu la proposition écrite au rang $k + 1$

(3) **Conclusion :** la proposition $P(n)$: $u_{n+1} > u_n$, est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Conclusion : La suite (v_n) est monotone croissante.

[4] Ceci serait facilement démontré par récurrence, dans un résultat préliminaire.

7 Suites majorées, minorées, bornées

7.1 Suites majorées

Définition :

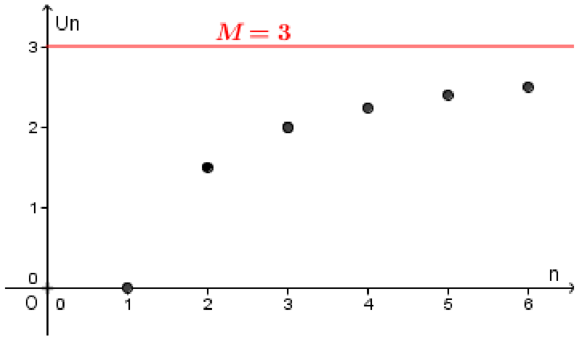
La suite (U_n) est **majorée** s'il existe un réel M, tel que <u>pour tout n</u>, $u_n \leq M$.

Exemple de suite majorée

La suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = 3 - \frac{3}{n}$$

est majorée par $M = 3$



7.2 Suites minorées

Définition :

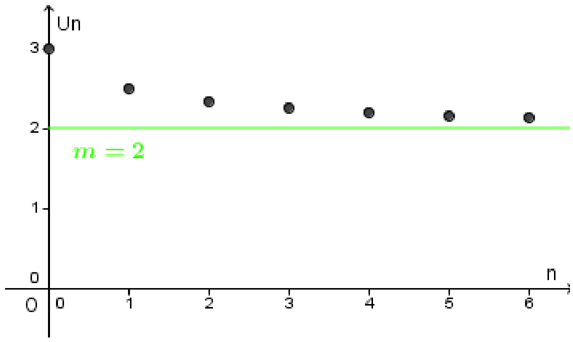
La suite (U_n) est **minorée** s'il existe un réel m, tel que <u>pour tout n</u>, $u_n \geq m$.

Exemple de suite minorée

La suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$U_n = 2 + \frac{1}{1+n}$$

est minorée par $m = 2$



7.3 Suites bornées

Définition :

La suite (U_n) est **bornée** s'il existe des réels m *et* M, tels que <u>pour tout n</u>, $m \leq u_n \leq M$.

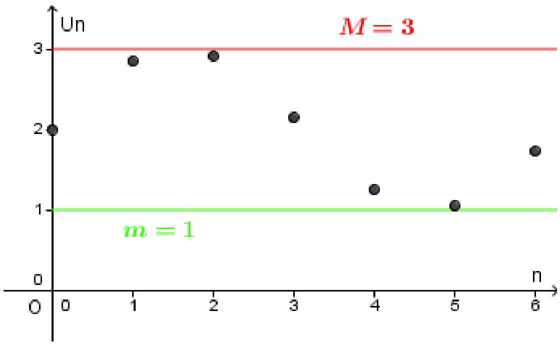
Une suite est bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple de suite bornée

La suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$U_n = 2 + \sin(n)$$

est bornée par $m = 1$ et $M = 3$



7.4 Méthodes pour étudier la majoration ou la minoration d'une suite

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est majorée par M ou minorée par m ou bornée , on peut :

7.4.1 Etudier le signe de $u_n - M$ (ou de $u_n - m$)

Exemple 1 :

Montrer que la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = 3 - \frac{3}{n}$$

est majorée par $M = 3$

Réponse

On calcule $U_n - 3$ puis on étudie son signe :

$$U_n - 3 = 3 - \frac{3}{n} - 3$$

$$U_n - 3 = -\frac{3}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{3}{n} > 0$$

$$-\frac{3}{n} < 0$$

$$U_n - 3 < 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad U_n < 3$$

<u>Conclusion :</u> La suite (U_n) est majorée par 3

Exemple 2 :

Montrer que la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$U_n = 2 + \frac{1}{1+n}$$

est minorée par $m = 2$

Réponse

On calcule $U_n - 2$ puis on étudie son signe :

$$U_n - 2 = 2 + \frac{1}{1+n} - 2$$

$$U_n - 2 = \frac{1}{1+n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1 + n > 0$$

$$\frac{1}{1+n} > 0$$

$$U_n - 2 > 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n > 2$$

<u>Conclusion :</u> La suite (U_n) est minorée par 2

7.4.2 Chercher un encadrement de u_n en travaillant sur des inégalités.

Exemple :

Montrer que la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_n = 2 + \sin(n)$ est bornée.

Réponse

On part de l'encadrement de $\sin(n)$ puis on arrive à un encadrement de U_n.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad -1 < \sin(n) < 1$$

$$2 - 1 < 2 + \sin(n) < 2 + 1$$

$$1 < 2 + \sin(n) < 3$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1 < U_n < 3$$

<u>Conclusion :</u>

La suite (U_n) est bornée par 1 et 3

7.4.3 Etudier le sens de variation de la suite (u_n)

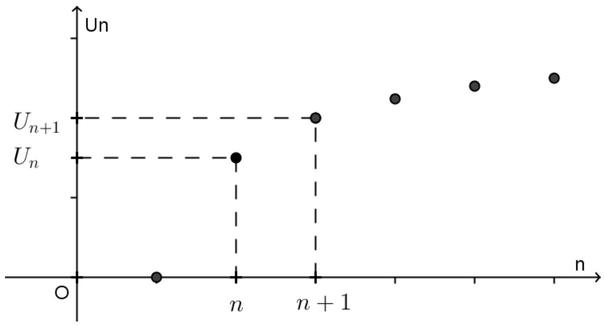
- Si la suite (u_n) est croissante pour tout $n \geq 0$, alors la suite (u_n) est **minorée par son premier terme**.

Exemple :

Démontrer que la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = 3 - \frac{3}{n}$$

est minorée par 0



Réponse :

On montre d'abord que la suite est monotone croissante (voir la démonstration au paragraphe 4.5.1)

Le premier terme est $U_1 = 3 - \frac{3}{1}$

<u>Conclusion :</u> La suite (U_n) est minorée par $U_1 = 0$

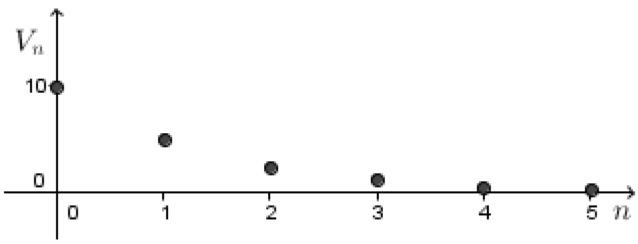
- Si la suite (u_n) est décroissante pour $n \geq 0$, alors la suite (u_n) est **majorée par son premier terme**.

Exemple :

Démontrer que la suite (V_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$(V_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} V_0 = 10 \\ V_{n+1} = 0{,}5V_n \end{cases}$$

est minorée par 10



Réponse :

La suite est géométrique de premier terme strictement positif est de raison $q = 0{,}5$

$0 < q < 1$ donc la suite est monotone décroissante. Le premier terme est $V_0 = 10$.

<u>Conclusion :</u> La suite (V_n) est majorée par 10

7.4.4 Utiliser un raisonnement par récurrence.

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$$

Démontrer que cette suite est majorée par 4

Réponse

Utilisons un raisonnement par récurrence pour établir la majoration de la suite (u_n)

Soit la proposition $P(n)$: $u_n \leq 4$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(1) **Initialisation** : Montrons que $P(n)$ est vraie pour $n = 0$.

On sait que $u_0 = 1$
Donc on a bien $u_0 \leq 4$
La proposition $P(n)$ est vraie pour $n = 0$.

(2) **Hérédité :** On suppose que la proposition $P(n)$ soit vraie pour un entier $k \geq 0$, c'est à dire qu'on suppose que $\boldsymbol{u_k} \leq 4$. Montrons qu'alors $P(n)$ est vraie pour l'entier $k + 1$, c'est à dire que $\boldsymbol{u_{k+1}} \leq 4$

- On cherche à écrire une inégalité concernant u_{k+1} en partant de l'hypothèse de récurrence : $u_k \leq 4$
  D'après la définition de la suite donnée dans l'énoncé, on a : $\boldsymbol{u_{k+1} = \frac{1}{4}u_k + 3}$

$$u_k \leq 4$$
$$\frac{1}{4}u_k \leq \frac{1}{4} \times 4$$
$$\frac{1}{4}u_k \leq 1$$
$$\frac{1}{4}u_k + 3 \leq 1 + 3$$
$$\boldsymbol{\frac{1}{4}u_k + 3} \leq 4$$
$$\boldsymbol{u_{k+1}} \leq 4$$

- On a obtenu la proposition écrite au rang $k + 1$

(3) **Conclusion :** la proposition $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 4$ est vraie. (u_n) est majorée par 4.

8 Limite d'une suite

8.1 Limite finie

Définition :

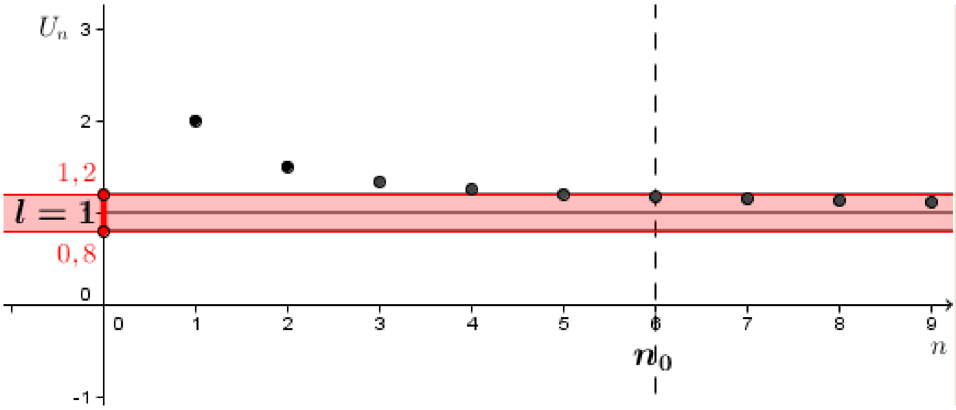
Soit l un réel. Dire qu'une suite (u_n) **a pour limite** $\boldsymbol{l}$ signifie que tout intervalle ouvert contenant l <u>contient tous les termes de la suite</u> à partir d'un certain rang. On écrit alors :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = l$$

Exemple :

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $U_n = 1 + \frac{1}{n}$ a pour limite $l = 1$.

Cela signifie que tout intervalle (l'intervalle $]0{,}8\ ;\ 1{,}2[$ dans l'illustration ci-dessous) contient tous les termes de la suite $(U_6, U_7,\ U_8\ \ldots)$ à partir d'un certain rang n_0 ($n_0 = 6$ dans l'exemple ci-dessous).



n	U_n
1	2
2	1.5
3	1.33
4	1.25
5	1.2
6	1.17
7	1.14
8	1.13
9	1.11

8.2 Limite infinie

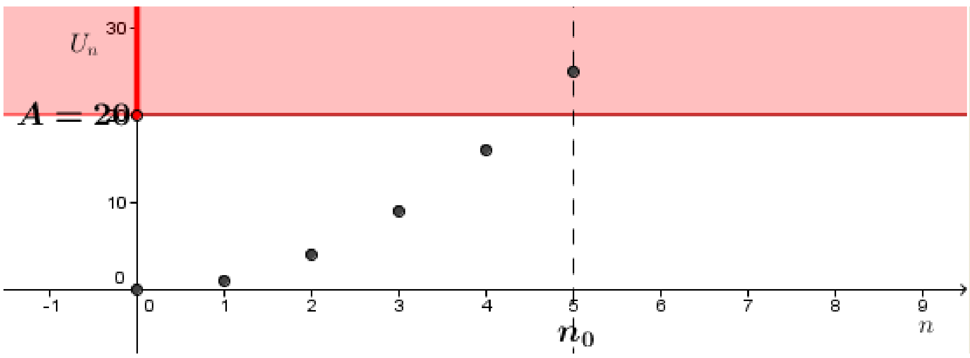
Définition 1 :

Dire qu'une suite (U_n) **a pour limite** $+\infty$ signifie que tout intervalle $]A\,;+\infty\,[$, avec A réel , <u>contient tous les termes de la suite</u> à partir d'un certain rang.

Exemple :

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = n^2$ a pour limite $+\infty$.

Cela signifie que tout intervalle (l'intervalle $]20\ ;\ +\infty[$ dans l'illustration ci-dessous) contient tous les termes de la suite $(U_5, U_6,\ U_7\ \ldots)$ à partir d'un certain rang n_0 ($n_0 = 5$ dans l'exemple ci-dessous).



n	U_n
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49

Définition 2 :

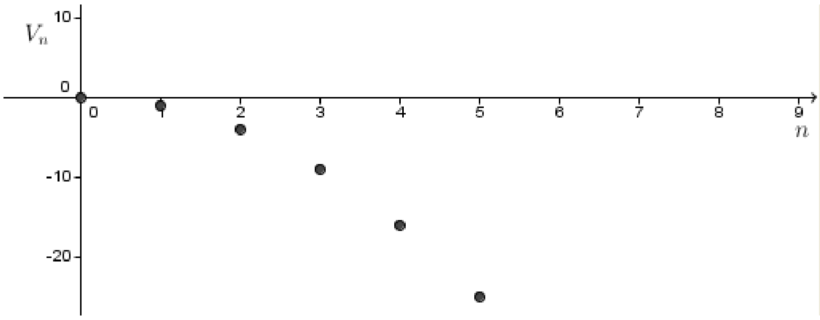
Dire qu'une suite (V_n) a pour limite $-\infty$ signifie que :

$$\lim_{n\to+\infty}(-V_n) = +\infty$$

Exemple :

La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $V_n = -n^2$ a pour limite $-\infty$.
En effet : $-V_n = n^2$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty}(-V_n) = +\infty$$

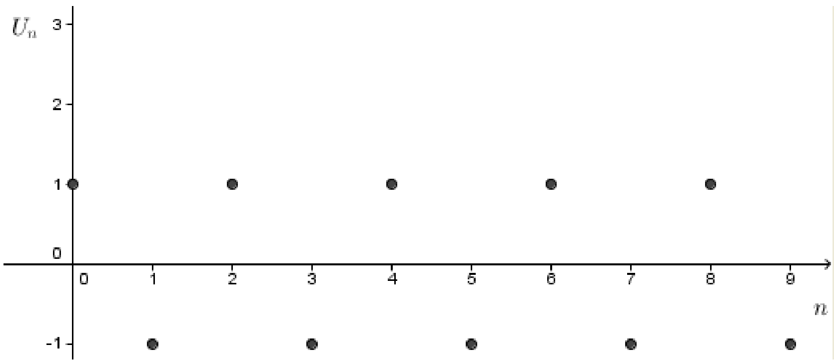


n	V_n
0	0
1	-1
2	-4
3	-9
4	-16
5	-25
6	-36
7	-49

8.3 Pas de limite

Exemple 1 :

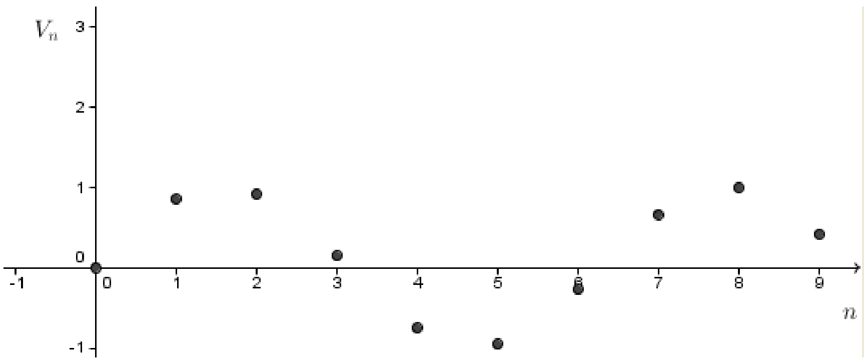
La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = (-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1. Elle n'a ni limite finie ni limite infinie.



n	U_n
0	1
1	-1
2	1
3	-1
4	1
5	-1
6	1
7	-1
8	1

Exemple 2 :

La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $V_n = \sin(n)$ prend alternativement des valeurs réelles entre -1 et 1. Elle n'a ni limite finie ni limite infinie.



n	V_n
0	0
1	0.84
2	0.91
3	0.14
4	-0.76
5	-0.96
6	-0.28
7	0.66
8	0.99

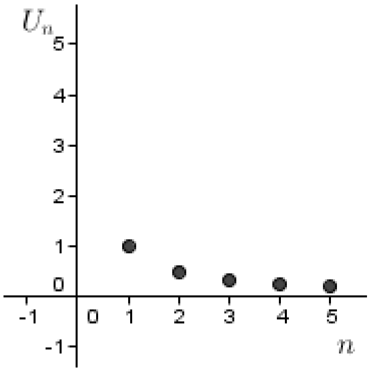
8.4 Vocabulaire

On dit que :

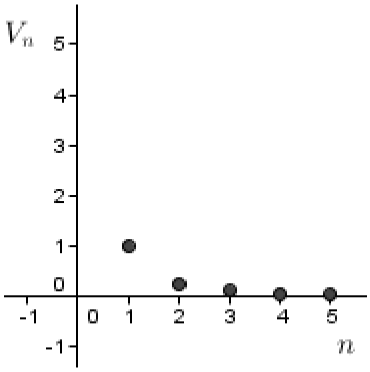
Une suite de limite finie l	converge vers l
Une suite de limite infinie	diverge
Une suite qui n'a pas de limite	diverge

8.5 Propriétés

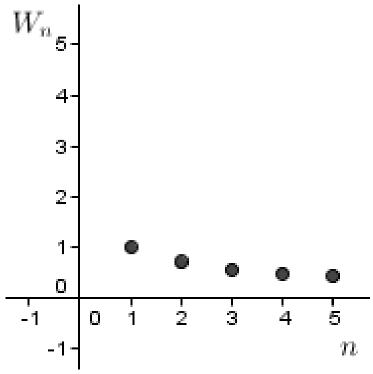
- Les suites de terme général $\frac{1}{n}$; $\frac{1}{n^2}$; $\frac{1}{\sqrt{n}}$ sont convergentes et leur limite est 0



$(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $U_n = \frac{1}{n}$

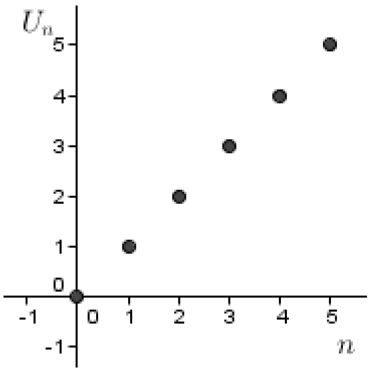


$(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $V_n = \frac{1}{n^2}$

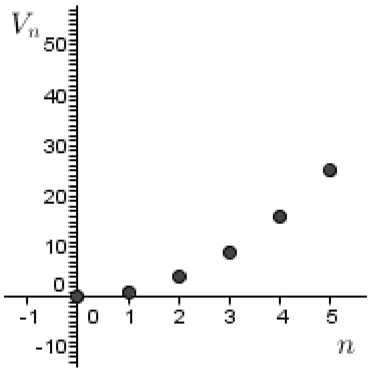


$(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $V_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

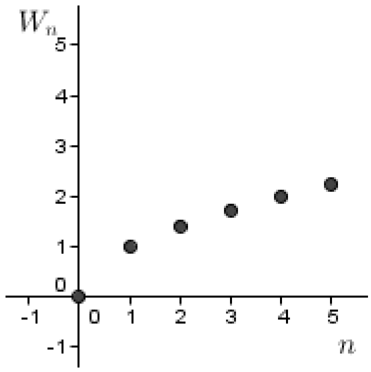
- Les suites de terme général n ; n^2 ; $\sqrt{n}$ sont divergentes et leur limite est $+\infty$



$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = n$

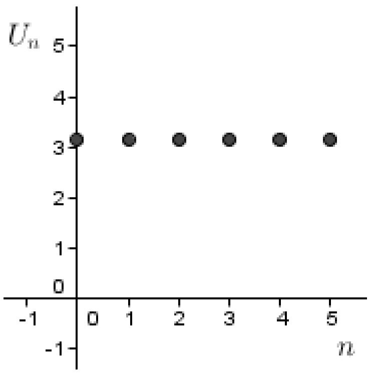


$(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $V_n = n^2$



$(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $W_n = \sqrt{n}$

- Les suites constantes convergent vers la valeur de la constante



$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = \pi$

- Si une suite converge alors sa limite l est **unique**.

- Détermination d'un seuil n_0 à l'aide d'un algorithme

Exemple :

Soit la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $U_n = 3n^2 + 2$

1. Montrer que cette suite est croissante
2. Montrer que cette suite a pour limite $+\infty$
3. Calculer et afficher le premier rang n_0 tel que $U_{n_0} \geq 20000$

Réponse

Puisque la suite est définie par une fonction de n, on peut étudier le sens de variation de la fonction.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2$

Cette fonction présente un extremum pour $x_S = -\frac{b}{2a}$

$$x_S = -\frac{0}{2 \times 3}$$

$$x_S = 0$$

$a = 3$ $\quad$ $a > 0$ $\quad$ donc l'extremum est un minimum.

Dans la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Il en résulte que la suite (U_n) est monotone croissante.

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

Donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} 3n^2 = +\infty$

et donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} 3n^2 + 2 = +\infty$

Déclaration des variables

N est un entier

U est un réel

Début algorithme

    N prend la valeur 0
    U prend la valeur 2
    Tant que U$<$ 20000
        N prend la valeur N+1
        U prend la valeur 3N²+2
    Fin Tant que
    Afficher N

Fin algorithme

9 Théorèmes généraux sur les limites de suites

9.1.1 Limite d'une somme de suites

Si $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	***FI***[5]

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\sqrt{n})$

Réponse : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}) = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\sqrt{n}) = +\infty$

9.1.2 Limite d'un produit de suites

Si $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) =$	l	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
et si $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n) =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n \times v_n)$	$l.l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***FI***

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n}$

Réponse : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}) = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\sqrt{n}) = +\infty$

9.1.3 Limite d'un quotient de suites

Si $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) =$	l	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
et si $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n) =$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
alors $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***FI***	***FI***

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n^2}$. *Réponse :* $\lim\limits_{n\to+\infty}(3) = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2) = +\infty$ donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n^2} = 0$

---

[5] Dans certains cas, ces théorèmes ne nous permettent pas de prévoir le résultat. Ces cas sont appelés *FORMES INDETERMINEES (FI).*

9.1.4 Cas d'indétermination

Il y a 4 cas d'indétermination $\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$

Dans ces cas, il faut modifier l'écriture de U_n pour permettre l'utilisation des théorèmes.

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt{n}\right)$. *Réponse :*

- On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}\right) = +\infty$ donc on est en présence de la forme indéterminée $\infty - \infty$
- On modifie l'écriture de $n-\sqrt{n}$, en cherchant par exemple à factoriser l'expression :

$$n-\sqrt{n} = n \times 1 - n\frac{\sqrt{n}}{n}$$
$$n-\sqrt{n} = n \times \left(1-\frac{\sqrt{n}}{n}\right)$$
$$n-\sqrt{n} = n \times \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- On étudie la limite de chaque facteur :

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$$

- Donc, par produit :

$$\lim_{n\to+\infty} n \times \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$$

<u>Conclusion</u> : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt{n}\right) = +\infty$

9.1.5 Limite en l'infini d'une suite définie par une fonction polynôme

La limite **<u>en l'infini</u>** d'une fonction polynôme[6] est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré. Il en est donc de même pour une suite définie par une fonction polynôme.

Exemple :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(-3n^2+4n+2) = \lim\limits_{n\to+\infty} -3n^2$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(-3n^2+4n+2) = -\infty$

9.1.6 Limite en l'infini d'une suite définie par une fonction rationnelle

La limite **<u>en l'infini</u>** d'une fonction rationnelle[7] est égale à la limite du quotient de ses monômes de plus haut degré. Il en est donc de même pour une suite définie par une fonction rationnelle.

Exemple :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3n^2+4n+2}{3n^3+4n^2-2n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3n^2}{3n^3}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3n^2+4n+2}{3n^3+4n^2-2n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-1}{n}$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3n^2+4n+2}{3n^3+4n^2-2n-1} = 0$

---

[6] **Polynôme** Un polynôme est une somme de monômes.
Une fonction polynôme est une fonction de la forme $x \longmapsto a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, où $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ sont des réels donnés et n un entier naturel appelé le degré du polynôme lorsque $a_n \neq 0$.

[7] **Rationnelle** : Quotient de deux polynômes.
Une fonction rationnelle est une fonction de la forme $x \longmapsto \frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$, où $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0, b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0$ sont des réels et n et m des entiers naturels tels que $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$.

9.2 D'autres théorèmes pour trouver une limite de suite

9.2.1 Théorème de comparaison pour prouver qu'une suite a comme limite $+\infty$

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang , $u_n \leq v_n$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Exemple :

Etudier la convergence de la suite (V_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $V_n = n^2 + (-1)^n$

Réponse :

Les théorèmes sur les opérations sur les limites ne permettent pas de répondre puisque la suite définie par $(-1)^n$ n'a pas de limite.

Mais on peut utiliser la comparaison de la suite (V_n) avec une suite (U_n) qu'on définit pour tout entier naturel n par $U_n = n^2 - 1$

En effet, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$-1 \leq (-1)^n$$
$$n^2 - 1 \leq n^2 + (-1)^n$$
$$n^2 - 1 \leq V_n$$
$$U_n \leq V_n$$

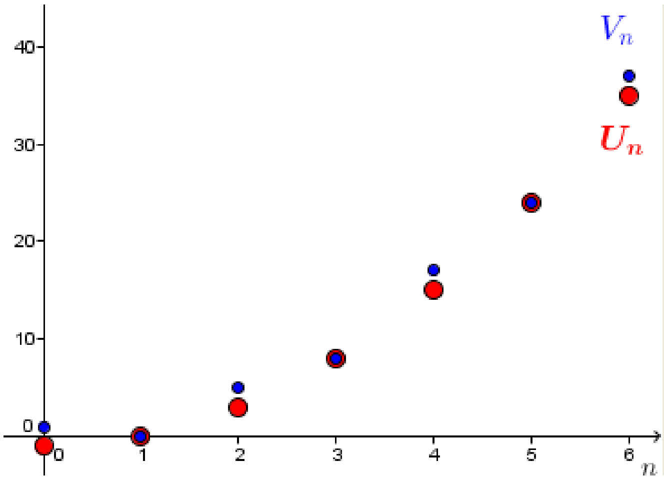
Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, et par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 - 1) = +\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$$

Donc, d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = +\infty$$

Illustration graphique :



n	U_n	V_n
0	-1	1
1	0	0
2	3	5
3	8	8
4	15	17
5	24	24
6	35	37
7	48	48
8	63	65
9	80	80
10	99	101

Démonstration :

- Par définition, si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$, alors il existe un entier naturel n_1 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_1$, $u_n \in]A\,;\, +\infty[$.
- De plus, par hypothèse il existe un entier naturel n_2 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_2$, $u_n \leq v_n$.
- Soit N un entier naturel supérieur ou égal à n_1 et n_2. Donc pour tout $n \geq N$: $v_n \geq A$, ainsi par définition de la limite $+\infty$ on déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

9.2.2 Théorème de comparaison pour prouver qu'une suite a comme limite -∞

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang , $u_n \leq v_n$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exemple :

Etudier la convergence de la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = -n^2 + \sin(n)$

Réponse :

On définit la suite (V_n) pour tout entier naturel n par $V_n = -n^2 + 1$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\sin(n) \leq 1$$

$$-n^2 + \sin(n) \leq -n^2 + 1$$

$$U_n \leq V_n$$

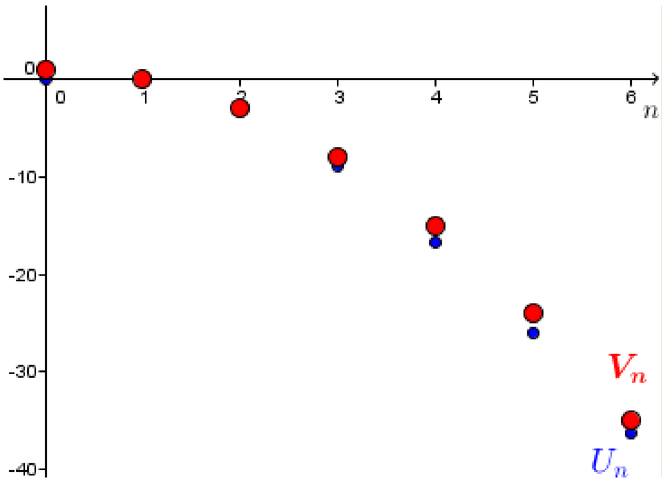
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$, et par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n^2 + 1) = -\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty$$

Donc, d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$$

Illustration graphique :



n	U_n	V_n
0	0	1
1	-0.16	0
2	-3.09	-3
3	-8.86	-8
4	-16.76	-15
5	-25.96	-24
6	-36.28	-35
7	-48.34	-48
8	-63.01	-63
9	-80.59	-80
10	-100.54	-99

9.2.3 Théorème des gendarmes pour prouver qu'une suite a pour limite *l*

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang , $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

Exemple :

Etudier la convergence de la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$V_n = \frac{5}{n}\sin(n) + 2$$

Réponse : On définit la suite (U_n) pour tout entier naturel n non nul par :

$$U_n = -\frac{5}{n} + 2$$

et la suite (W_n) pour tout entier naturel n non nul par :

$$W_n = \frac{5}{n} + 2$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$
$$-5 \leq 5\sin(n) \leq 5$$
$$\frac{-5}{n} \leq \frac{5\sin(n)}{n} \leq \frac{5}{n}$$
$$\frac{-5}{n} + 2 \leq \frac{5\sin(n)}{n} + 2 \leq \frac{5}{n} + 2$$
$$U_n \leq V_n \leq W_n$$

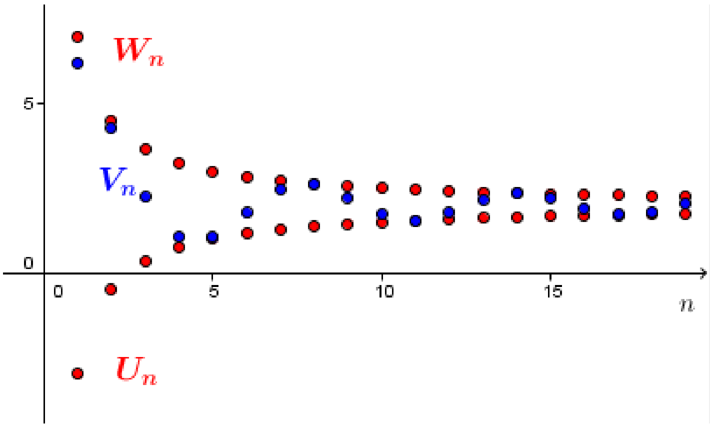
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$, et par produit et par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{-5}{n} + 2\right) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{n} + 2\right) = 2$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} W_n = 2$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = 2$$

Illustration graphique :



n	U_n	V_n	W_n
1	-3	6.21	7
2	-0.5	4.27	4.5
3	0.33	2.24	3.67
4	0.75	1.05	3.25
5	1	1.04	3
6	1.17	1.77	2.83
7	1.29	2.47	2.71
8	1.38	2.62	2.63
9	1.44	2.23	2.56
10	1.5	1.73	2.5

9.3 Remarque

(u_n) converge vers l $\Leftrightarrow$ (u_{n+1}) converge vers l .

Conséquence :

Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$

Si la suite (u_n) converge vers une limite finie l, alors l vérifie l'équation $l = f(l)$

Démonstration :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = f(u_n)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$

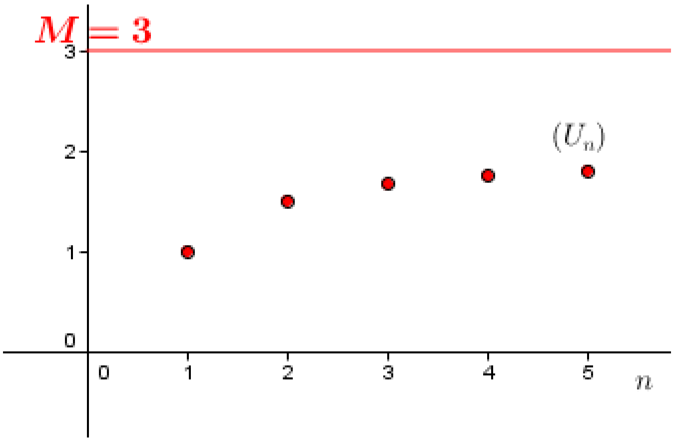
Or, $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l) \end{cases}$

D'où : $l = f(l)$

9.4 Théorème de la convergence d'une suite monotone (admis)

- 1er cas : Soit une suite croissante. Si cette suite est majorée alors elle converge.

Exemple :



La suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = 2 - \frac{1}{n}$

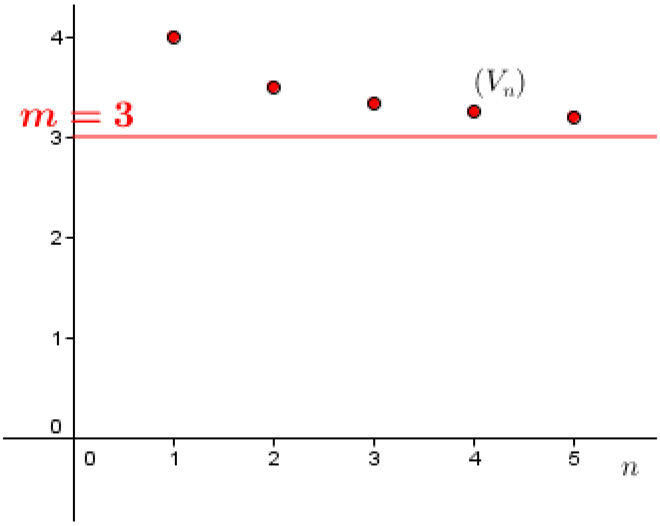
On montre que :

- (U_n) est croissante
- (U_n) est majorée par 3 (par exemple)

On conclut que *d'après le théorème de la convergence d'une suite monotone*, la suite (U_n) a une limite finie.

- 2ème cas : Soit une suite décroissante. Si cette suite est minorée alors elle converge.

Exemple :



La suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n = 3 + \frac{1}{n}$

On montre que :

- (V_n) est décroissante
- (V_n) est minorée par 3 (par exemple)

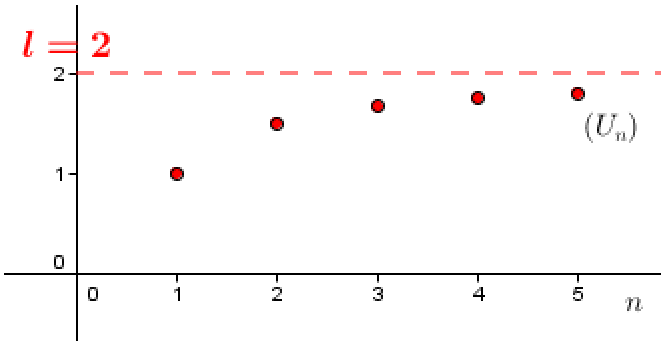
On conclut que *d'après le théorème de la convergence monotone*, la suite (V_n) a une limite finie.

⚠ Le théorème de la convergence monotone permet d'assurer qu'une suite converge. Mais il ne donne pas la valeur de la limite.

9.5 Propriété : Suite croissante de limite *l*

Soit une suite croissante. Si cette suite est converge vers l alors l est un majorant de la suite.

Exemple :



La suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = 2 - \frac{1}{n}$

On montre que :

- (U_n) est croissante
- (U_n) converge vers 2

On conclut que 2 est un majorant de la suite (U_n).

Démonstration :

Utilisons un raisonnement par l'absurde. Supposons que la propriété soit fausse.

Montrons que :

Si $\begin{cases} (u_n) \text{est monotone strictement croissante} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = l \end{cases}$ alors l **n'est pas** un majorant de (u_n)

Conduit à une absurdité.

(1) l **n'est pas** un majorant de (u_n) donc il existe au moins un des termes u_k de la suite tel que

$$u_k > l$$

(2) $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = l$ signifie qu'il existe un rang n_0 à partir duquel, pour tout $n \geq n_0$, *tout intervalle ouvert contenant* l contient tous les termes u_n de la suite.

Au point (1) on avait : $l < u_k$

Par ailleurs, on a par exemple : $l - 1 < l$

Et donc on a : $l - 1 < l < u_k$

D'où l'intervalle ouvert $]l - 1 \ ; \ u_k[$ est un *intervalle ouvert contenant* l.

On en déduit qu'il existe un rang $\boldsymbol{n_0}$ à partir duquel, pour tout $\boldsymbol{n \geq n_0}$, l'intervalle ouvert $\boldsymbol{]l - 1 \ ; \ u_k[}$ contient tous les termes $\boldsymbol{u_n}$ de la suite.

(3) La suite (u_n) est monotone croissante, donc, pour tout $n > k$ on a $u_n > u_k$.

Donc, **pour tout $\boldsymbol{n > k}$ on a $\boldsymbol{u_n > l}$.**

<u>Conclusion :</u>

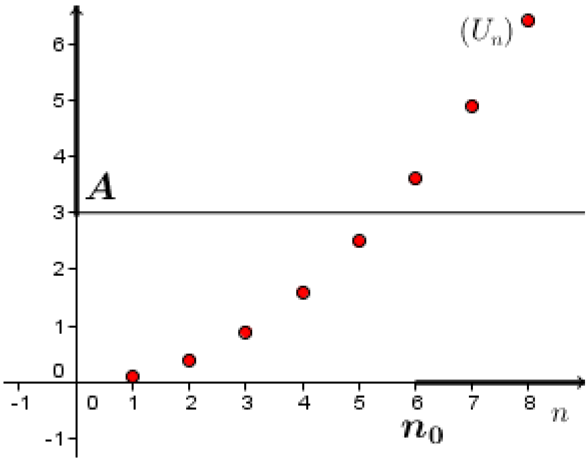
D'après le (2) il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a : $l - 1 < \boldsymbol{u_n < u_k}$.

D'après le (3) il existe un entier k tel que pour tout $n > k$ on a : $\boldsymbol{u_n > u_k}$.

C'est absurde. Donc la propriété énoncée ne peut pas être fausse. Donc elle est vraie.

9.6 Théorème : suite croissante non majorée

Soit une suite croissante. Si cette suite n'est pas **majorée**, alors elle diverge vers $+\infty$.



Démonstration : Soit A un réel.

- La suite (u_n)n'est pas majorée donc il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A$.
- De plus , la suite (u_n) est croissante , donc tous ses termes , à partir du rang n_0 sont supérieurs à A et sont donc dans l'intervalle $]A\,;\,+\infty[$.

Donc tout intervalle du type $]A\,;\,+\infty[$.contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (qui est n_0). Donc, par définition de la limite $+\infty$, la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

De même, on démontre que :

Soit une suite décroissante. Si cette suite n'est pas **minorée**, alors elle diverge vers $-\infty$.

9.7 Limite d'une suite de terme général q^n

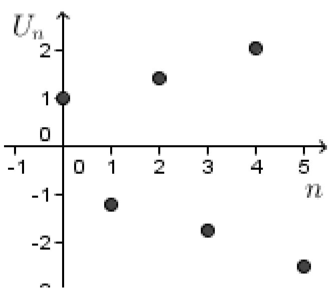
Propriété :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = q^n$ avec $q \in \mathbb{R}$.

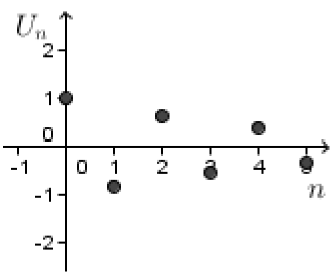
Si le valeur du réel q est telle que …	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = \cdots$	n'existe pas	0	1	$+\infty$

Illustration :

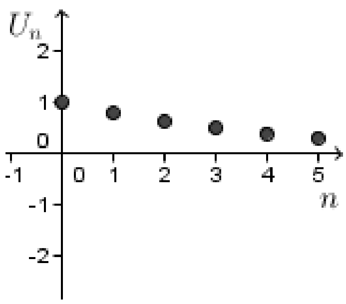
$n \longmapsto (-1{,}2)^n$



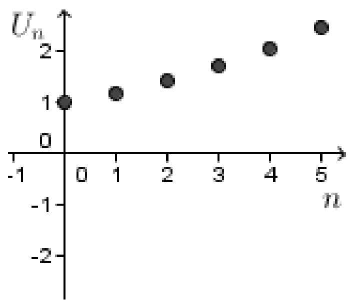
$n \longmapsto (-0{,}8)^n$



$n \longmapsto 0{,}8^n$



$n \longmapsto 1{,}2^n$



Démonstration : dans le cas où q >1.

✶ Démontrons d'abord, par récurrence, le résultat préliminaire suivant :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \boldsymbol{(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha}$$

On appelle P_n la propriété à démontrer.

Initialisation : pour $n = 0$.
D'une part, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \quad (1+\alpha)^0 = 1$
D'autre part, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \quad 1 + 0\alpha = 1$
Donc on a

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad (1+\alpha)^0 \geq 1 + 0\alpha$$

La proposition P_0 est vraie.

Hérédité : On admet que pour l'entier naturel k, la proposition Pk est vraie soit :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad (1+\alpha)^k \geq 1 + k\alpha$$

Démontrons alors que la proposition P_{k+1} l'est aussi soit

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad (1+\alpha)^{k+1} \geq 1 + (k+1)\alpha$$

Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad (1+\alpha)^k \geq 1 + k\alpha$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad (1+\alpha)^{k+1} \geq (1 + k\alpha)(1+\alpha)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad (1+\alpha)^{k+1} \geq 1 + \alpha + k\alpha + k\alpha^2$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad (1+\alpha)^{k+1} \geq 1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2$$

Or, $1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2 \geq 1 + (k+1)\alpha$

Donc

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad (1+\alpha)^{k+1} \geq 1 + (k+1)\alpha$$

Ainsi la proposition P_n est héréditaire.

Conclusion : P_n est vraie tout entier naturel n

✶Comme $q > 1$ alors on peut poser $q = 1 + \alpha$ avec α >0.

Ainsi, la propriété P_n démontrée s'écrit : $\boldsymbol{q^n \geq 1 + n\alpha}$

On calcule les limites :

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + n\alpha) = +\infty$$

D'où, en utilisant le théorème de comparaison :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$$

10 Limite d'une fonction

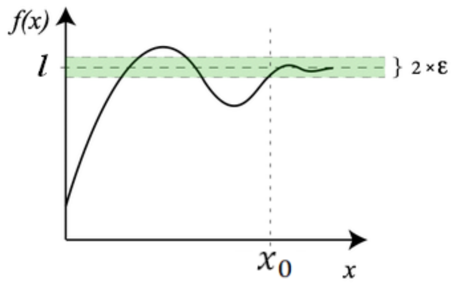
10.1 Limite finie l en $+\infty$ ou $-\infty$

Soit l un réel.

Dire qu'une fonction a pour **limite** l en $+\infty$ signifie que **tout intervalle ouvert** $]\boldsymbol{l-\varepsilon}\ ;\ \boldsymbol{l+\varepsilon}[$ **contenant** $\boldsymbol{l}$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x assez grand. (Enoncé analogue en $-\infty$).

Remarque :
Cette définition est analogue à celle donnée pour les suites de limite l en remplaçant « à partir d'un certain rang n_0 » par « dès que x est assez grand », autrement dit à partir d'un certain réel x_0.

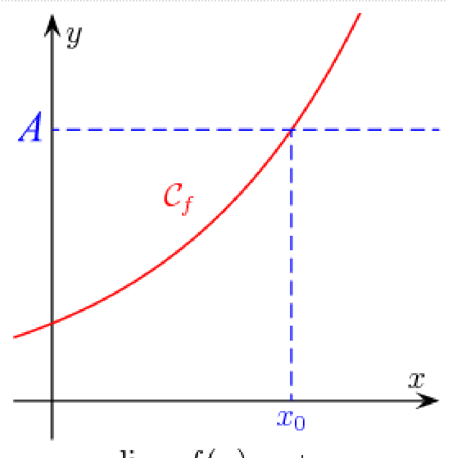
Illustration :



10.2 Limite infinie en +∞

Dire qu'une fonction f a pour **limite** $+\infty$ en $+\infty$ signifie que **tout intervalle** $]\boldsymbol{A}\ ;\ +\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

Illustration :



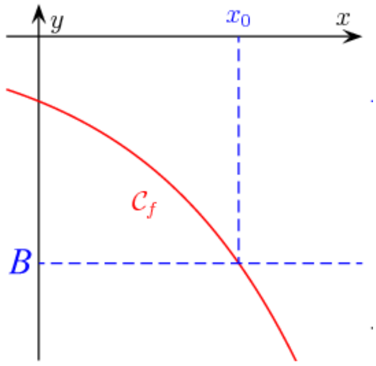
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

<u>Exemple :</u> Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Démontrons avec la définition que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Soit A un réel positif. $\sqrt{x} > A \iff x > A^2$. Donc pour x assez grand (ici $x > A^2$), l'intervalle $]A\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Dire qu'une fonction f a pour **limite** $-\infty$ en $+\infty$ signifie que **tout intervalle** $]-\infty\,;\,\boldsymbol{B}[$, avec B réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

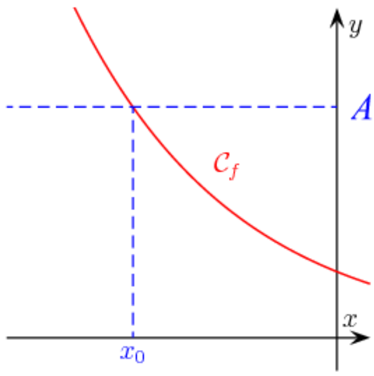


$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

10.3 Limite infinie en -∞

Dire qu'une fonction f a pour **limite**$+\infty$ en $-\infty$ signifie que **tout intervalle** $]\boldsymbol{A}\,;\,+\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout x inférieur à une certaine valeur x_0..

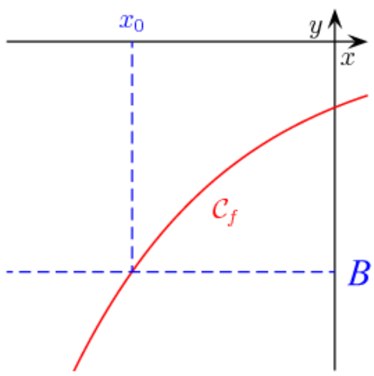
Illustration :



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Dire qu'une fonction f a pour **limite**$-\infty$ en $-\infty$ signifie que **tout intervalle** $]-\infty\,;\,\boldsymbol{B}[$, avec B réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout x inférieur à une certaine valeur x_0..

Illustration :

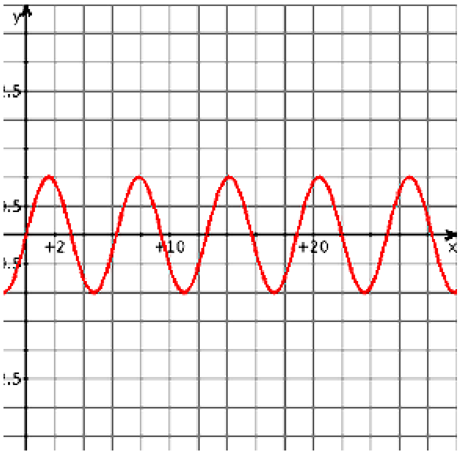


$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

10.4 Pas de limite en + ∞

Une fonction peut n'avoir ni limite finie ni limite infinie lorsque x tend vers +∞

Illustration :



La fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$

10.5 Limite finie $\boldsymbol{l}$ en un réel $\boldsymbol{a}$

Soit l un réel et soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant un certain réel a.

Dire qu'une fonction a pour **limite** $\boldsymbol{l}$ en $x = a$ signifie que **tout intervalle ouvert** $]\boldsymbol{l} - \boldsymbol{\varepsilon}\ ;\ \boldsymbol{l} + \boldsymbol{\varepsilon}[$ **contenant** $\boldsymbol{l}$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a.

Remarque 1 :

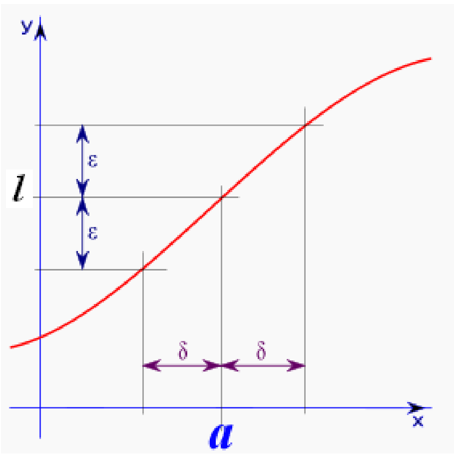
On entend par « dès que x est assez proche de a », le fait qu'il existe un intervalle $]a - \delta\,; a + \delta[$ tel que si $x \in\,]a - \delta\,; a + \delta[$ alors toutes les valeurs de $f(x)$ sont dans l'intervalle $]\boldsymbol{l} - \boldsymbol{\varepsilon}\ ;\ \boldsymbol{l} + \boldsymbol{\varepsilon}[$ qu'on a choisi.

Remarque 2 :

La définition précédente reste valable dans le cas où la fonction f est définie sur un ensemble du type $]a - h\,; a[\, \cup\,]a\,; a + h[$ ou $]a - \delta\,; a[$ ou $]a; +\infty[$.

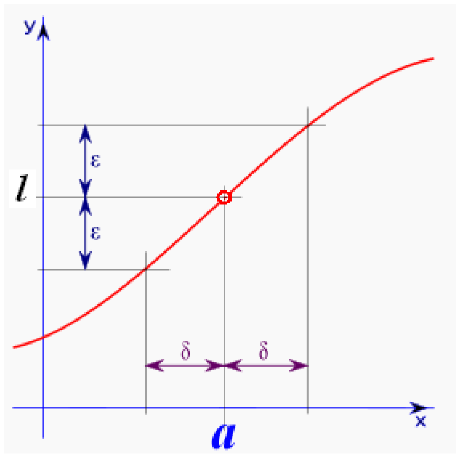
Illustrations :

f est définie sur $]a - h\,; a + h[$



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

f est définie sur $]a - h\,; a[\, \cup\,]a\,; a + h[$



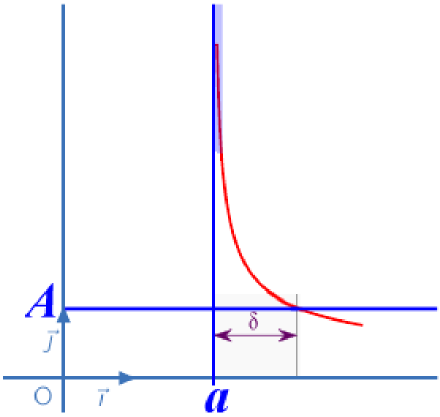
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

10.6 Limite $+\infty$ en un réel a

Dire qu'une fonction a pour **limite** $+\infty$ en $x = a$ signifie que **tout intervalle** $]A\,;\,+\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a

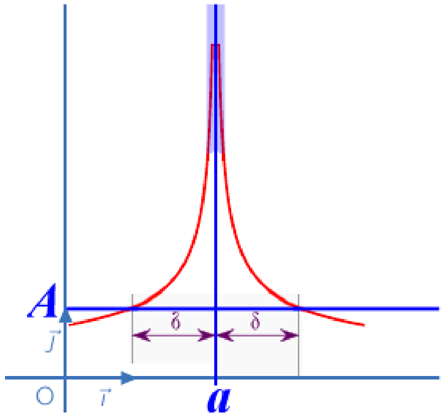
Illustrations

f est définie sur $]a; a + h[$



$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

f est définie sur $]a - h\,; a[\, \cup\,]a; a + h[$



$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

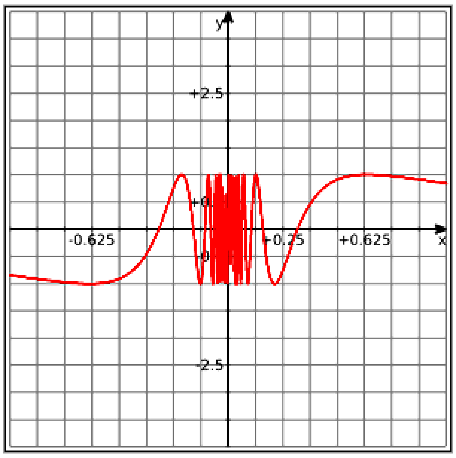
Remarque :

On définit de la même façon

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

10.7 Pas de limite en a

Une fonction définie sur un ensemble du type $]a - h\,; a[\, \cup\,]a; a + h[$ peut ne pas avoir de limite en a. C'est le cas par exemple de la fonction définie sur $]-\infty\,; 0[\, \cup\,]0; +\infty[$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$



10.8 Théorèmes généraux.

- Les théorèmes utilisés pour les calculs des limites de suites sont réutilisés et étendus aux limites en $-\infty$ et en un réel a.
- l et l' sont deux réels, f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$
- Le réel a peut être remplacé par $+\infty$ ou $-\infty$.

10.8.1 Limite d'une somme.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	***FI***

10.8.2 Limite d'un produit.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$	$l.l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***FI***

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} kf(x), k \in \mathbb{R}$	kl	$+\infty$ si $k>0$ $-\infty$ si $k<0$	$-\infty$ si $k>0$ $+\infty$ si $k<0$	0 si $k=0$

10.8.3 Limite d'un quotient.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	$l\neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\neq 0$	$+\infty$ ou $+\infty$	0	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	$+\infty$ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***FI***	***FI***

10.9 Théorème des gendarmes (admis)

Soient f, g et h des fonctions et l un réel.

Si pour x assez grand, $g(x) < f(x) < h(x)$, si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$

alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

Ce théorème s'étend aux cas de limites en $-\infty$ et en un réel.

10.10 Théorème de comparaison (admis)

Soient f et g deux fonctions.

- Si pour x assez grand, $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- Si pour x assez grand, $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

10.11 Limites et composées

10.11.1 Composée de deux fonctions

a , b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

f et g sont des fonctions. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$

alors $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = c$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$par $f(x) = cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Réponse : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} cos(X) = 1$ donc **par composition**, $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

10.11.2 Composée d'une suite et d'une fonction

a et b désignent deux réels ou $+\infty$ ou$-\infty$.

(u_n) est une suite, f est une fonction.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$

Exemple : Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $v_n = sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Réponse : Posons $v_n = f(u_n)$ avec :

(u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = sin(x)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{4}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc **par composition**, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$

11 Asymptotes.

11.1 Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées (asymptote verticale).

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a\,;b[$ ou $]c\,;a[$ $(a, b, c$ réels)

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe C_f représentative de f.

11.2 Asymptote parallèle à l'axe des abscisses (asymptote horizontale).

Soit f une fonction définie sur un intervalle] $]a\,;+\infty[$ (respectivement $]-\infty\,;a[$). (a réel)

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$),

alors la droite d'équation $y = b$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f représentative de f en $+\infty$ (respectivement$-\infty$).