

Thème : Les nombres premiers

Activité 1. Autour des nombres premiers (6 exercices)

Exercice 1 : *Nombres croisés*

Prérequis : La division euclidienne

Objectifs : Introduction et manipulation des nombres premiers sans formalisme, décomposition en produit de facteurs premiers.

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					

Horizontalement :

1. Carré parfait dont le produit des chiffres est 756.
2. Le nombre formé de ses deux premiers chiffres est le même que celui formé de ses deux derniers chiffres.
3. Multiple de 139.
Reste de la division euclidienne de 2 001 par 9.
4. Nombre formé par permutation des chiffres 23 444.
5. Carré parfait.
Le produit de ses chiffres est 392.

Verticalement :

- A. La somme de ses chiffres est 35.
- B. Entier divisible par 11.
- C. Nombre palindrome.
- D. Nombre premier.
Cube parfait.
- E. Entier naturel admettant un seul diviseur positif.
Le produit de ses chiffres est 72 et seul son dernier chiffre est pair.

Vocabulaire :

- Un nombre est appelé premier s'il a exactement deux diviseurs positifs, 1 et lui-même.
- Un nombre est appelé carré parfait s'il est le carré d'un entier.
- Un nombre est dit palindrome s'il se lit aussi bien à l'endroit qu'à l'envers.

Exercice 2 : Le crible d'Eratosthène

Prérequis : Notion de multiples

Objectifs : Définition d'un nombre premier, établir la liste des nombres premiers inférieurs à 100.

Eratosthène (276-194 avant J.C.) est un mathématicien et un astronome grec. Il fût le premier à donner une méthode reconnue permettant de mesurer la circonférence de la Terre.

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

1) Suivre les instructions suivantes :

- Entourer 2
- Barrer tous les multiples de 2 dans la suite du tableau
- Entourer 3
- Barrer tous les multiples de 3 dans la suite du tableau

Poursuivre la même démarche en entourant le plus petit des nombres non déjà barrés et en barrant ensuite tous ses multiples.

2) Etablir la liste des nombres entourés.

3) Pour chacun de ces nombres établir la liste de leurs diviseurs. Conclure.

Exercice 3 : Tester la primalité (exercice identique à l'exercice 1 de l'activité 2 « Algorithmes sur les nombres premiers »)

Prérequis : Diviseurs, nombres premiers.

Objectifs : Test de primalité et sa programmation. Amélioration d'un algorithme.

1) A l'aide de divisions successives, dire parmi les nombres suivants ceux qui sont premiers.

107, 227, 375, 377, 379, 571.

2) Recommencer la question précédente en réduisant le nombre de tests. Expliquer votre démarche. Avez-vous l'impression de pouvoir être encore plus "économique" ? Comment peut-on minimiser le nombre de tests ?

3) On considère l'algorithme suivant :

Déclaration des variables : N et I sont des entiers

Début de l'algorithme

Saisir N

Si $N \leq 3$

Alors

Si $N = 2$ ou $N = 3$

Alors

Afficher " N PREMIER"

Sinon

Afficher " N NON PREMIER"

Fin Si

Sinon

I prend la valeur 2

Tant que (I ne divise pas N) et ($I \leq E(\sqrt{N})$)

I prend la valeur $I + 1$

Fin Tant que

Si I divise N

Alors

Afficher " N NON PREMIER"

Sinon

Afficher " N PREMIER"

Fin Si

Fin Si

Fin de l'algorithme

Note :

La fonction **E** est la fonction partie entière : A tout réel x elle associe l'unique entier relatif $E(x)$ qui lui est immédiatement inférieur ou égal.

Exemples :

$E(3) = 3$; $E(3,14) = 3$; $E(-2,718) = -3$.

- Sur les calculatrices TI, il s'agit de la commande **partEnt** - ou **int** pour les calculatrices en anglais - (touche **math**, menu MATH)
- Sur les Casio, il s'agit de la commande **Intg** (touche **OPTN**, menu NUM).

Faire fonctionner sur le papier cet algorithme pour $N = 19$, $N = 21$ et $N = 53$. Qu'affiche-t-il ?

- 4) a) Programmer cet algorithme sur la calculatrice (Nommer ce programme TESTA).
- b) Vérifier que le programme fonctionne pour $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$, $N = 19$, $N = 21$ et $N = 53$ puis l'utiliser pour dire parmi les nombres suivants lesquels sont premiers : 2 011 ; 2 013 ; 2 015 ; 2 017 et 2 019.
- c) Chronométrer le temps que met le programme TESTA pour tester la primalité de $N = 7\ 237\ 031$.
- 5) a) Modifier l'algorithme précédent pour tester la division par 2 et pour ensuite ne pas tester la division par tous les autres nombres pairs.
- b) Programmer cet algorithme sur la calculatrice (Nommer ce programme TESTB).
- c) Vérifier que le programme fonctionne correctement pour $N = 19$, $N = 21$ et $N = 53$ et pour N pair. Chronométrer le temps que met le programme TESTB pour tester la primalité de $N = 7\ 237\ 031$.

Exercice 4 : L'infinitude des nombres premiers

Prérequis : Programme de test de primalité, programme sur la calculatrice de recherche de diviseurs premiers.
Démonstration par l'absurde.

Objectifs : Infinitude des nombres premiers.

1) On considère la suite u définie de la façon suivante pour tout entier naturel n strictement positif :

$$u_1 = 2 + 1$$

$$u_2 = 2 \times 3 + 1$$

$$u_3 = 2 \times 3 \times 5 + 1$$

$$u_4 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1$$

$$u_5 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 + 1$$

$$u_6 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1$$

...

$$u_n = p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 \times \dots \times p_n + 1 \text{ où } p_i \text{ est le } i \text{ ème nombre premier}$$

...

Reproduire et compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n								
u_n est-il premier ?								
Plus petit diviseur premier de u_n								

2) Pour chacun de ces huit termes, quel est son plus petit diviseur premier ? Ce diviseur est-il utilisé pour construire ce terme de la suite ?

3) On va donc utiliser cette remarque pour démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Supposons que l'ensemble des nombres premiers soit fini et qu'ainsi, il existe un nombre premier que l'on notera p supérieur à tous les autres nombres premiers.

Le dernier terme de la suite u que l'on notera U est donc égal à $N = 2 \times 3 \times \dots \times p + 1$

- Justifier que $N > p$.
- En déduire que N n'est pas premier et que donc il est composé.
- Justifier que ni 2, ni 3, ..., ni p ne sont des diviseurs de N .
- Souligner la contradiction que l'on vient de mettre en évidence.
- Que peut-on alors dire de **la conjecture** ? Conclure.

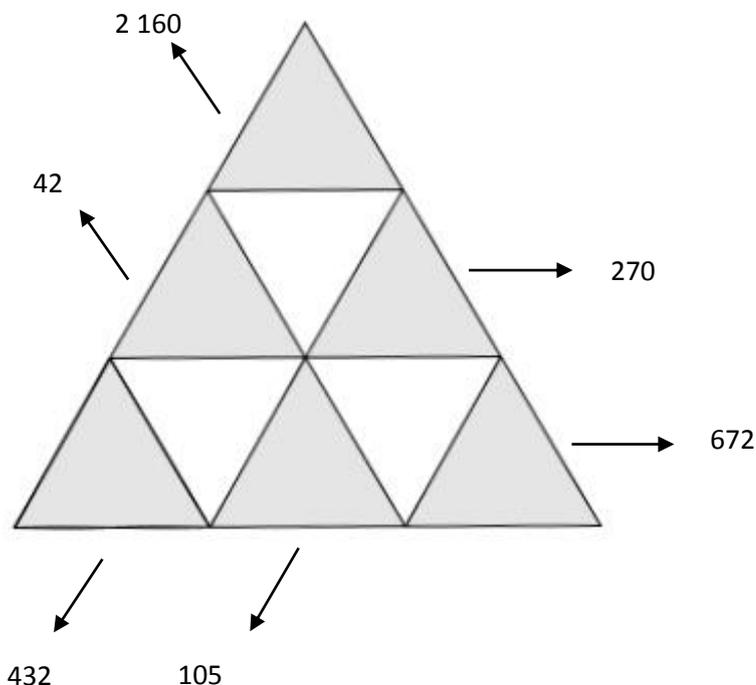
Exercice 5 : Le triangle mystère

Prérequis : Décomposition en produit de facteurs premiers.

Objectifs : Résolution de problème "ouvert".

Les nombres entiers de 1 à 9 doivent être placés dans les neuf cases du triangle ci-dessous.

Les nombres écrits à l'extérieur du triangle sont les **produits** des nombres placés dans les trois ou cinq cases situées dans l'alignement de la flèche.



Exercice 6 : Vrai - Faux

Prérequis : Nombres premiers, nombre de diviseurs.

Objectifs : Travailler sur l'existence et sur « pour tout ».

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

- 1) La somme de deux nombres premiers est un nombre composé.
- 2) Soit p un nombre premier différent de 2. L'entier $p^2 + 4$ est un nombre composé.
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de diviseurs positifs de 10^n est égal à $(n + 1)^2$.
- 4) Un nombre entier qui admet exactement 15 diviseurs positifs possède exactement 2 facteurs premiers distincts.
- 5) Aucune suite u , définie par $u_n = an + 5$ avec a un entier naturel non nul, ne comporte que des entiers premiers.
- 6) L'algorithme ci-contre fournit $n - 1$ nombres composés.

Note : « Factorielle n » est le nombre noté « $n!$ », défini par :

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n - 1) \times n$.
- Par convention, $0! = 1$.

ENTREE :

n entier naturel supérieur ou égal à 2

INITIALISATION :

Affecter à S la valeur $n!$

TRAITEMENT ET SORTIE :

Pour k allant de 2 à n

Afficher $S + k$

Fin Pour