Chapitre 1 : Nombres et calculs numériques

Chapitre 1 : Nombres et calculs numériques

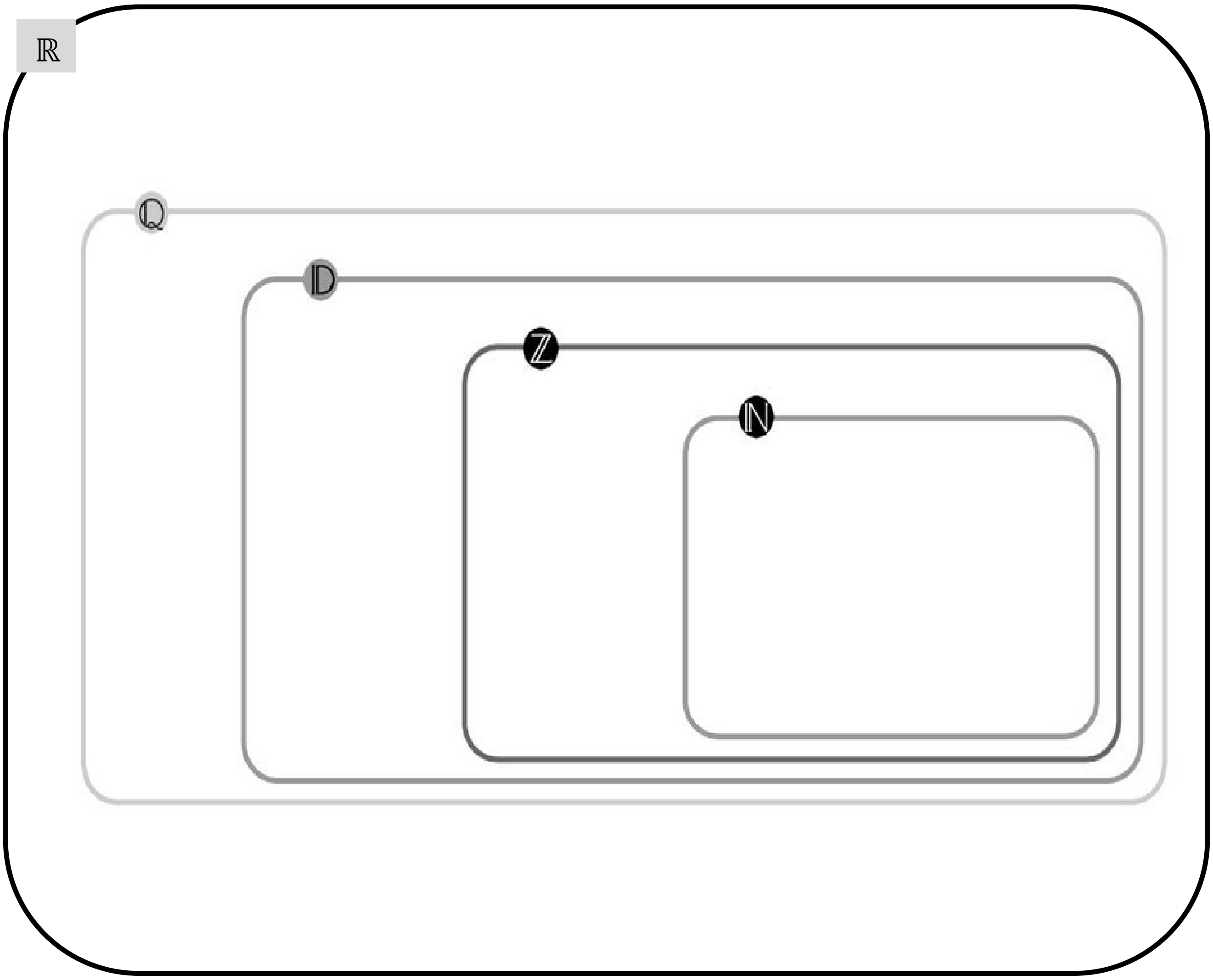
1 Les ensembles de nombres : Leur contenu et leur notation

1.1 Activité de découverte

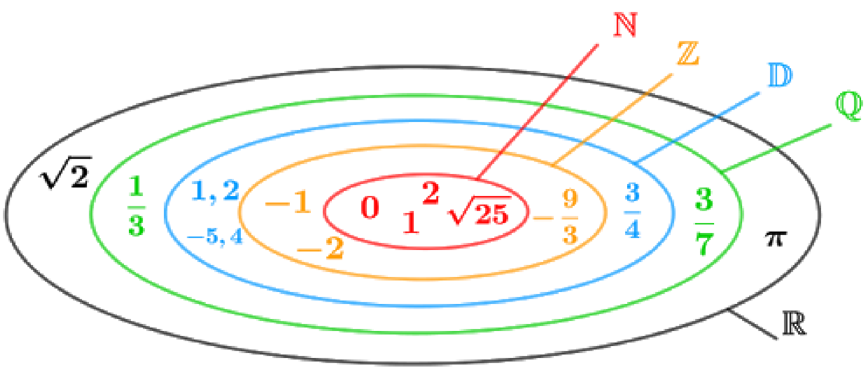
Historiquement, nous avons eu besoin de nombres de plus en plus « compliqués » …	… mais pour quelle utilité ?
$0, 1, 2, 3$ etc.	…
$-1, -2, -3$ etc.	…
$0{,}1$; $\frac{1}{2}$; $2{,}5$; $5{,}25$ etc.	…
$-0{,}5$; $-2{,}2$; $-4{,}75$ etc.	…
$\frac{1}{3}$; $\frac{3}{7}$	…
$-\frac{1}{3}$; $-\frac{3}{7}$	…
$\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ etc.	…
π ; $2\,\pi$ etc.	…

- Les ensembles de nombres sont inclus les uns dans les autres de la manière suivante : **des nombres de plus en plus « compliqués » sont venus s'ajouter progressivement afin de créer des ensembles de nombres de plus en plus gros.**

- Placer sur le schéma ci-dessous les nombres présents dans le tableau précédent.



1.2 Contenus et notations des ensembles de nombres

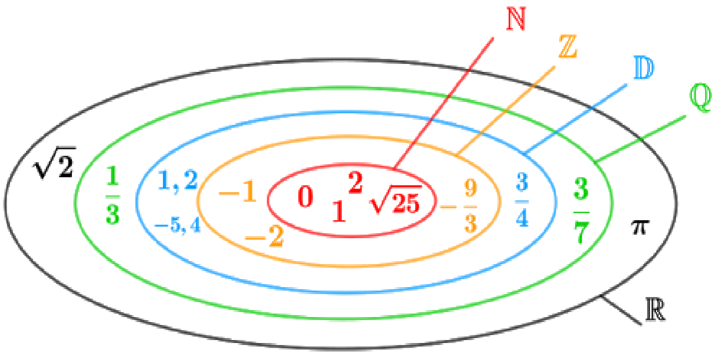


Ensemble de nombres	Caractéristiques de ces nombres	Notation
Ensemble des **entiers naturels**	Cet ensemble contient $0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \frac{12}{3} = 4\ ;$ $\sqrt{25} = 5$ … etc. ➢ Il contient les **entiers positifs**.	$\mathbb{N}$ (comme naturel)
Ensemble des **entiers relatifs**	Cet ensemble contient $-2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \frac{12}{3} = 4\ ;$ $\sqrt{25} = 5$ … etc. ➢ Il contient tous les entiers naturels <u>et en plus</u> les **entiers négatifs**.	$\mathbb{Z}$ (comme *Zahl* qui signifie nombre en allemand)
Ensemble des **nombres décimaux**	Cet ensemble contient $-2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \frac{12}{3} = 4\ ;$ $\sqrt{25} = 5\ ;\ 1{,}2\ ;\ -5{,}4\ ;\ \frac{3}{4} = 0{,}75$ … etc. ➢ Il contient tous les entiers relatifs <u>et en plus</u> les **nombres rationnels (quotients de deux entiers relatifs) qui ont un nombre fini de décimales**.	$\mathbb{D}$ (comme décimal)
Ensemble des **nombres rationnels**	Cet ensemble contient $-2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \frac{12}{3} = 4\ ;$ $\sqrt{25} = 5\ ;\ 1{,}2\ ;\ -5{,}4\ ;\ \dfrac{3}{4} = 0{,}75\ ;\ \dfrac{1}{3} = 0{,}33333\ldots\ ;$ $\frac{3}{7} = 0{,}428571\ 428571\ 428571$ … etc. ➢ Il contient tous les nombres décimaux <u>et en plus</u> les **nombres rationnels, (quotients de deux entiers relatifs) qui ont un nombre *infini* de décimales.**	$\mathbb{Q}$ (comme quotient)
Ensemble des **nombres réels**	Cet ensemble contient $-2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \frac{12}{3} = 4\ ;$ $\sqrt{25} = 5\ ;\ 1{,}2\ ;\ -5{,}4\ ;\ \dfrac{3}{4} = 0{,}75\ ;\ \dfrac{1}{3} = 0{,}33333\ldots\ ;$ $\frac{3}{7} = 0{,}428571\ 428571\ 428571\ ;\ \pi\ ;\ \sqrt{2}$ … etc. ➢ Il contient tous les nombres rationnels <u>et en plus</u> les **nombres *irrationnels*, (qui ne peuvent pas s'écrire comme quotients de deux entiers relatifs)** comme $\pi\ ;\ \sqrt{2}$.	$\mathbb{R}$ (comme réel)

1.3 Inclusion des ensembles de nombres et symbole d'inclusion

a) Mettre une croix si le nombre indiqué appartient à l'ensemble de nombres proposé.

Nombre	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
4					
-7					
$\frac{1}{2} = \dots$					
$\frac{1}{6} = \dots$					
$-\sqrt{100} = \dots$					
$\sqrt{1000} = \dots$					
$-\frac{3\pi}{2} = \dots\dots$					



b) Symbole d'inclusion d'un ensemble dans un autre

- Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs.

On dit que **l'ensemble** $\mathbb{N}$ **est inclus dans l'ensemble** $\mathbb{Z}$ et on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ n'est pas inclus dans $\mathbb{N}$ se note $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{N}$.

c) Ne pas confondre le symbole d'inclusion d'un ensemble dans un autre avec le symbole d'appartenance d'un nombre à un ensemble : **2 appartient à** $\mathbb{N}$ **se note 2** $\in \mathbb{N}$

Compléter par le symbole qui convient (parmi $\subset$, $\not\subset$, $\in$, $\notin$) chaque proposition :

$-3 \ \dots \ \mathbb{N}$ $\qquad$ $\frac{1}{4} \ \dots \ \mathbb{D}$ $\qquad$ $\mathbb{Z} \ \dots \ \mathbb{Q}$ $\qquad$ $\mathbb{Q} \ \dots \ \mathbb{N}$

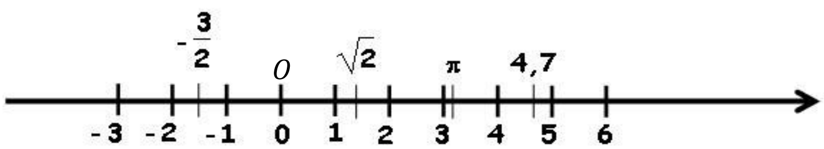
1.4 Nature d'un nombre

La **nature** d'un nombre est donnée par le plus **petit ensemble de nombres** qui le contient.

Exemples : 2 est un **entier naturel**, -1 est un **entier relatif**, $\frac{3}{7}$ est un **rationnel**, $\sqrt{2}$ est un **réel**.

1.5 Représentation de l'ensemble $\mathbb{R}$

L'ensemble des réels est représenté par un axe (droite munie d'une origine O et d'une graduation). Cet axe est appelé **la droite des réels**. L'ensemble des abscisses de l'axe est l'ensemble des nombres réels.



2 Calculs à la main avec des fractions

- Pour additionner ou soustraire deux fractions on doit les mettre au même dénominateur. Le résultat s'obtient en additionnant ou en soustrayant les numérateurs.

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}} \qquad \boldsymbol{\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}}$$

- Multiplication : on doit multiplier ensemble les numérateurs et ensemble les dénominateurs.

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}}$$

- Division : on doit multiplier la première fraction par **l'inverse** de la deuxième fraction.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c} \qquad \boldsymbol{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times c}}$$

- Pour effectuer les opérations, on doit respecter l'ordre de priorité :

1. Parenthèses	2. Puissances et racines	3. Multiplications et divisions	4. Additions et soustractions

Exemples : Calculer et présenter sous la forme d'une fraction irréductible :

$\boldsymbol{A=\frac{40}{9}-\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{9}\right)}$

$A=\frac{40}{9}-\left(\frac{6}{9}-\frac{2}{9}\right)$

$A=\frac{40}{9}-\frac{4}{9}$

$A=\frac{36}{9}$

$A=4$

$\boldsymbol{B=\frac{8}{15}\times\frac{5}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}$

$B=\frac{2\times4\times5}{3\times5\times4}+\frac{-3}{4}+\frac{1}{4}$

$B=\frac{2}{3}+\frac{-3+1}{4}$

$B=\frac{2}{3}+\frac{-2}{4}$

$B=\frac{2\times4}{3\times4}+\frac{-2\times3}{4\times3}$

$B=\frac{8}{12}+\frac{-6}{12}$

$B=\frac{8-6}{12}$

$B=\frac{2}{12}$

$B=\frac{1}{6}$

$\boldsymbol{C=\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right):\frac{3}{2}}$

$C=\left(\frac{2\times3}{5\times3}+\frac{1\times5}{3\times5}\right):\frac{3}{2}$

$C=\left(\frac{6}{15}+\frac{5}{15}\right):\frac{3}{2}$

$C=\frac{11}{15}:\frac{3}{2}$

$C=\frac{11}{15}\times\frac{2}{3}$

$C=\frac{22}{45}$

3 Calculs avec les puissances

3.1 Comprendre une puissance

a) Calculer, sans la calculatrice, les puissances suivantes :

$2^3=$	$0^{14}=$	$(-2)^3=$
$(-1)^{10}=$	$(-1)^{13}=$	$10^0=$

- Si a est un nombre réel et n est un entier naturel alors $a^n=a\times a\times\ldots\times a$
- Si a est un nombre réel non nul alors $a^0=1$

b) Que signifie un exposant entier et négatif comme dans les puissances 3^{-2} ou 10^{-3} ?

…

Si a est un entier relatif non nul et si n est un entier naturel, alors $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

c) Les nombres 3^{-2} et 3×10^{-2} sont-ils égaux ? Préciser votre réponse.

…

3.2 Produit de puissances

Simplifier les produits suivants en détaillant la démarche afin de trouver une formule de calcul plus rapide :

$10^3 \times 10^2 =$ …

$10^6 \times 10^{-2} =$ …

$5^3 \times 5^2 =$ …

$3^3 \times 3^{-1} =$ …

Pour simplifier des produits de puissances plus rapidement, on utilise la formule suivante :

Si a est un entier relatif non nul, m et n sont des entiers relatifs, alors $a^m \times a^n = a^{n+m}$

3.3 Quotient de puissances

Simplifier les quotients suivants en détaillant la démarche afin de trouver une formule de calcul plus rapide :

$\frac{10^5}{10^3} = \cdots$

$\frac{10^2}{10^{-2}} = \cdots$

$\frac{(-3)^6}{(-3)^2} = \cdots$

Pour simplifier des quotients de puissances plus rapidement, on utilise la formule suivante :

Si a est un entier relatif non nul, m et n sont des entiers relatifs, alors $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3.4 Puissance d'une puissance

Simplifier les calculs suivants en détaillant la démarche afin de trouver une formule de calcul plus rapide :

$(10^5)^2 = ...$

$(2^4)^{-3} = ...$

Pour simplifier des puissances de puissances plus rapidement, on utilise la formule suivante :

> Si a est un entier relatif non nul, *m* et *n* sont des entiers relatifs, alors $(a^m)^n = a^{m \times n}$

3.5 Autres formules

$$\bullet (ab)^m = \underbrace{ab \times ab \times ... \times ab}_{m \text{ facteurs}} = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{m \text{ facteurs}} \times \underbrace{b \times b \times ... \times b}_{m \text{ facteurs}} = a^m \times b^m$$

$$\bullet \left(\frac{a}{b}\right)^m = \underbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times ... \times \frac{a}{b}}_{m \text{ facteurs}} = \frac{a \times a \times ... \times a}{b \times b \times ... \times b} = \frac{a^m}{b^m}$$

⚠ Ceci est **faux pour** la puissance d'une **somme** ou d'une **différence**.
$(a+b)^n \neq a^n + b^n$ et $(a-b)^n \neq a^n - b^n$ (il s'agit bien du symbole ≠ et pas du symbole =).

3.6 Exercice d'application

Compléter le tableau suivant :

	$\boldsymbol{a^n \times a^p = a^{n+p}}$	$\boldsymbol{\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}}$	$\boldsymbol{(a^n)^p = a^{n \times p}}$
1.	$6^5 \times 6^3 = \cdots$	$\frac{5^7}{5^2} = \cdots$	$(4{,}8^2)^3 = \cdots$
2.	$2^7 \times 2^4 = \cdots$	$\frac{(-8)^{16}}{(-8)^{15}} = \cdots$	$(13^4)^{-4} = \cdots$
3.	$7^5 \times ... = 7^{15}$	$\frac{15^{12}}{\cdots} = 15^3$	$(9^2)^{\cdots} = 9^{14}$
4.	$3^5 \times 3^2 \times 3^6 = \cdots$	$\frac{\cdots}{11^2} = 11^8$	$(2^{\cdots})^{-5} = 2^{-35}$

4 L'écriture scientifique

En écriture scientifique, une valeur numérique s'exprime sous la forme :

$\boldsymbol{a} \times 10^{\boldsymbol{n}}$ avec $\boldsymbol{n}$ nombre entier relatif et $\boldsymbol{a}$ nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$.

Exemples : Taille d d'une molécule d'eau : $d = 0{,}000\,000\,003\,4\ m$ ou encore $d = \mathbf{3{,}4 \times 10^{-9}}\ m$.
Masse de la Lune : $m = 734\,800\,000\,000\,000\,000\,000\ kg$ ou encore $m = \mathbf{7{,}348 \times 10^{20}}\ kg$.

Remarque : La calculatrice TI-83 CE possède un mode scientifique :

- Appuyer sur mode et, sur la 2e ligne, **SCI**
- Appuyer sur 2nd quitter
- Saisir 0,00432 puis appuyer sur entrer

L'affichage 4.32E-3 signifie $\mathbf{4{,}32 \times 10^{-3}}$

- Appuyer sur mode et, sur la 2e ligne, **NORMAL** pour revenir au mode normal.
- Appuyer sur 2nd quitter

Il faut avoir en tête quelques modèles pour les puissances de 10 :

$10 = 10^1$ dix	$0{,}1 = 10^{-1}$ un dixième
$100 = 10^2$ cent	$0{,}01 = 10^{-2}$ un centième
$1000 = 10^3$ mille	$0{,}001 = 10^{-3}$ un millième
$1000000 = 10^6$ un million	$0{,}000001 = 10^{-6}$ un millionième
$1\mathbf{000000000} = 10^{\mathbf{9}}$ un milliard	$0{,}\mathbf{000000001} = 10^{-\mathbf{9}}$ un milliardième

*Une puissance de 10 **positive** =*
*indique le nombre de **zéros***

*Une puissance de 10 **négative** =*
*indique le nombre de **chiffres <u>après</u> la virgule***

5 Calculs avec les racines carrées

5.1 Lien entre le carré et la racine carrée d'un réel positif $\boldsymbol{a}$

Si à un réel **positif** a, on applique successivement un carré et une racine carrée alors on ne fait rien et on retrouve le réel a car ces deux opérations annulent leurs effets quand elles sont appliquées successivement.

➢ Cas où la racine carrée est appliquée avant le carré :

$a \geq 0 \xrightarrow{\text{racine carrée}} \sqrt{a} \xrightarrow{\text{carré}} \boxed{(\sqrt{a})^2 = a}$ ***Exemple :*** $\left(\sqrt{12}\right)^2 = 12$

➢ Cas où le carré est appliqué avant la racine carrée :

$a \geq 0 \xrightarrow{\text{carré}} a^2 \xrightarrow{\text{racine carrée}} \boxed{\sqrt{a^2} = a}$ ***Exemple :*** $\sqrt{12^2} = 12$

5.2 Racine carrée des carrés parfaits

On appelle **carré parfait** tout carré d'un entier naturel.

Nombre	Carrés parfaits
0	**0**
1	**1**
2	**4**
3	**9**
4	**16**
5	**25**
6	**36**
7	**49**
8	**64**
9	**81**
10	**100**
11	**121**
12	**144**
...	...

Nous connaissons la valeur des racines carrées des carrés parfaits, sans utiliser la calculatrice, en utilisant le fait que le carré et la racine carrée annulent leurs effets quand on les applique successivement.

Exemples : $\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{36} = 6$ $\sqrt{100} = 10$

5.3 Lien entre le carré et la racine carrée d'un réel strictement négatif

- Cas où la racine carrée est appliquée avant le carré :

$a < 0 \xrightarrow{\text{racine carrée}} \textit{impossible}$ ***Exemple :*** $\left(\sqrt{-12}\right)^2$ *impossible*

- Cas où le carré est appliqué avant la racine carrée :

$a < 0 \xrightarrow{\text{carré}} a^2 \xrightarrow{\text{racine carrée}} \boxed{\sqrt{a^2} = a}$ ***Exemple :*** $\sqrt{(-12)^2} = 12$

La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas. Mais dans le deuxième cas, le calcul est possible car le carré d'un nombre négatif est positif ce qui rend le calcul de la racine carrée possible.

Exemples :

$\sqrt{(-2)^2}$ = …	$\sqrt{(-6)^2}$ = …	$\sqrt{(-10)^2}$ = …

- Résumé de la simplification des calculs quand une racine carrée et un carré sont appliqués successivement :

	Le réel *a* est positif ($a \geq 0$)	Le réel *a* est strictement négatif ($a < 0$)
La racine carrée est appliquée avant le carré	$(\sqrt{a})^2 = a$	impossible
Le carré est appliqué avant la racine carrée	$\sqrt{a^2} = a$	$\sqrt{a^2}$ = l'opposé de *a* noté $-a$

5.4 Décomposition d'une racine carrée en deux racines carrées

Pour tous réels **positifs** a et b, la racine d'un produit est égal au produit des racines :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Pour tout réel **positif** a et tout réel **strictement positif** b, la racine d'un quotient est égal au quotient des racines :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemples:

$$\sqrt{3 \times 5} = \sqrt{3} \times \sqrt{5}$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

⚠ Ceci est **faux pour** la racine d'une **somme** ou d'une **différence**.

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$ (Attention, il s'agit bien du symbole ≠ et pas du symbole =)

On peut retenir que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

6 Valeur arrondie d'un nombre

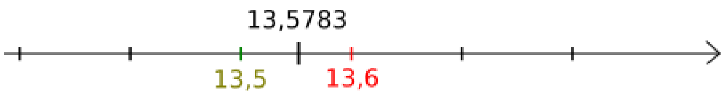
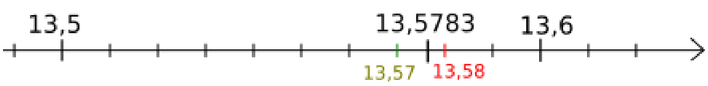
6.1 Donner un nombre avec une précision demandée

Donner le résultat à la précision …	signifie qu'il faut écrire …
$de\ l'unité$	$aucun$ chiffre après la virgule
$du\ dixième$	1 chiffre après la virgule
$du\ centième$	2 chiffres après la virgule
$du\ millième$	3 chiffres après la virgule

6.2 Règle pour donner un résultat arrondi

Méthode : pour déterminer l'arrondi à l'unité, au dixième, au centième d'un nombre décimal, on coupe le nombre au rang voulu puis on augmente le dernier chiffre de 1 si le chiffre qui suit est 5, 6, 7, 8 ou 9.

Exemple : Donner l'arrondi d'un nombre avec la précision demandée.

Donner …	On cherche …	Schéma	Réponse
La valeur **arrondie à l'unité près** de 13,5783	Le nombre **entier le plus proche** de 13,5783		…
La valeur **arrondie au dixième près** (ou à 0,1 près ou à 10^{-1} près) de 13,5783	Le nombre **décimal ayant un chiffre après la virgule le plus proche** de 13,5783.		…
La valeur **arrondie au centième près** (ou à 0,01 près ou à 10^{-2} près) de 13,5783	Le nombre **décimal ayant deux chiffres après la virgule le plus proche** de 13,5783		…

6.3 Valeurs arrondies par défaut et par excès

Exemple : $a = 13{,}57$ et $b = 13{,}58$ sont les valeurs arrondies à 0,01 près de 13,5783 respectivement *par défaut* et *par excès*. Lorsqu'on demande la valeur arrondie sans plus de précision, il faut donner celle des deux qui est la plus proche, comme vu au paragraphe 6.2.

6.4 Règle pour donner un encadrement avec une amplitude demandée

Un encadrement est une double inégalité. Le nombre est entouré de deux bornes a et b. L'amplitude de l'encadrement est la différence $b - a$

Exemple : Donner un *encadrement* d'amplitude 10^{-2} de 13,5783

Méthode : On prend $a = 13{,}57$ et $b = 13{,}58$ d'où l'encadrement est $13{,}57 \leq 13{,}5783 \leq 13{,}58$.