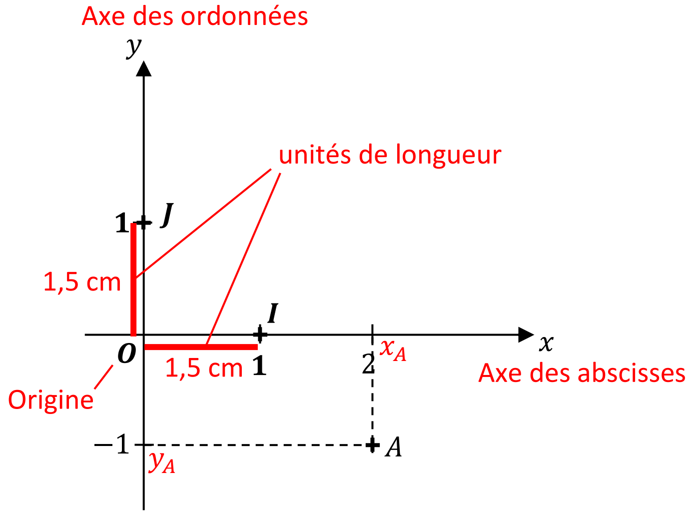
Chapitre 2 : Repérage dans le plan

Chapitre 2 : Repérage dans le plan

1 Repère orthonormé et notation des coordonnées



Le repère représenté ci-dessus est le repère (O, I, J) où $\boldsymbol{O}$ est **l'origine** du repère et $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont les points associés aux **graduations 1 sur l'axe des abscisses** (Ox) **et sur l'axe des ordonnées** (Oy).

Le repère (O, I, J) est orthonormé ce qui signifie :

$$\begin{cases} (OI) \perp (OJ) \\ OI = 1 \\ OJ = 1 \end{cases}$$

L'unité de longueur pour ce graphique est 1,5 cm.

Cela signifie que l'on place la graduation 1 à 1,5 cm de la graduation 0.

On dit : "On considère le repère orthonormé (O, I, J) d'unité 1,5 cm."

Dans ce repère, le point A a pour coordonnées $(2\,;\,-1)$. On note $\boldsymbol{A(2\,;\,-1)}$.

- 2 est l'abscisse de A. On note $\boldsymbol{x_A = 2}$.
- -1 est l'ordonnée de A. On note $\boldsymbol{y_A = -1}$.

On aurait pu choisir une autre unité de longueur pour faire le graphique.

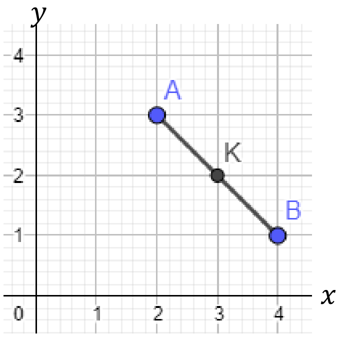
2 Coordonnées du milieu d'un segment

2.1 Découverte

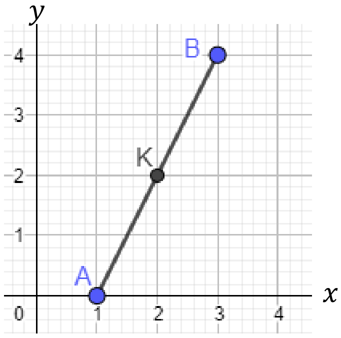
On se place dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 1 cm.

Conjecturer[1] les coordonnées du point K qui est le milieu du segment $[AB]$ dans les cas suivants :

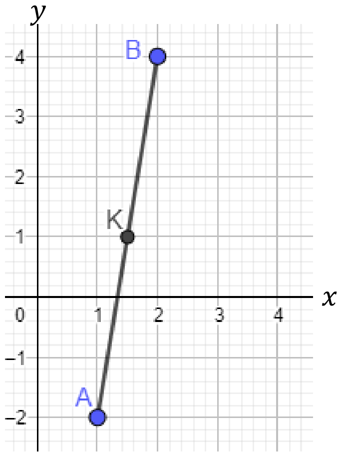
$A(2\,;3)$ et $B(4\,;1)$



$A(1\,;0)$ et $B(3\,;4)$



$A(1\,;-2)$ et $B(2\,;4)$



Réponse : Il semble que :

Pour $A(2\,;3)$ et $B(4\,;1)$ on a le milieu $K(3\,;2)$.

Pour $A(1\,;0)$ et $B(3\,;4)$ on a le milieu $K(2\,;2)$.

Pour $A(1\,;-2)$ et $B(2\,;4)$ on a le milieu $K(1{,}5\,;1)$.

2.2 Formule des coordonnées du milieu

Si dans un repère (O,I,J) on a $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ alors le milieu K du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x_K = \frac{x_A+x_B}{2} \\ y_K = \frac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$.

Autrement dit, **les coordonnées du milieu sont les moyennes** des coordonnées des points.

2.3 Application

On donne dans un repère orthonormé les points $A(-2\,;-1)$ et $B(5\,;-3)$. Calculer les coordonnées de K le milieu de $[AB]$.

Réponse :

$$\begin{cases} x_K = \frac{-2+5}{2} \\ y_K = \frac{-1-3}{2} \end{cases}.$$

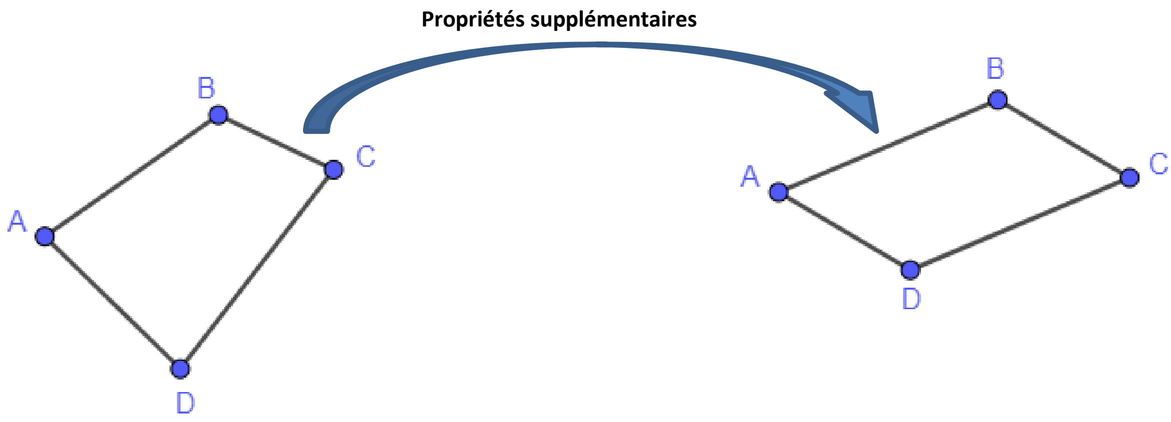
$$\begin{cases} x_K = \dfrac{3}{2} \\ y_K = \dfrac{-4}{2} \end{cases}$$

Donc $K(1{,}5 :\ -2)$.

[1] **Conjecturer :** émettre une conjecture c'est-à-dire faire une supposition.

3 Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

3.1 Recherche de la méthode



Quadrilatère quelconque ***Parallélogramme***

Pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, il existe plusieurs méthodes :

$$\begin{cases} (AB) \parallel (DC) \\ \quad et \\ (AD) \parallel (BC) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} (AB) \parallel (DC) \\ \quad et \\ AB = DC \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} AB = DC \\ \quad et \\ AD = BC \end{cases}$$

ou

$$\boxed{[AC]\ et\ [BD]\ \ ont\ le\ même\ milieu\ K}$$

C'est cette dernière méthode que nous allons utiliser.

3.2 Exemple

Dans un repère orthonormé (O, I, J) on considère les points :

$A(-1\,;2)$, $B(2\,;1)$, $C(4\,;-2)$ et $D(1\,;-1)$. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Réponse :

On pose K le milieu de $[AC]$ et L le milieu de $[BD]$.

Calcul des coordonnées de K

$$\begin{cases} x_K = \frac{-1+4}{2} \\ y_K = \frac{2-2}{2} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{3}{2} \\ y_K = \dfrac{0}{2} \end{cases}$$

Donc $K(1{,}5 : 0)$.

Calcul des coordonnées de L

$$\begin{cases} x_L = \frac{2+1}{2} \\ y_L = \frac{1-1}{2} \end{cases}.$$

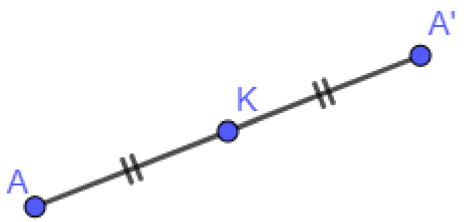
$$\begin{cases} x_L = \dfrac{3}{2} \\ y_L = \dfrac{0}{2} \end{cases}$$

Donc $L(1{,}5 : 0)$.

Les points K et L ont les mêmes coordonnées. Donc ils sont confondus. Donc les diagonales du quadrilatère $ABCD$ ont le même milieu. Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

4 Coordonnées d'un point obtenu par symétrie centrale

4.1 Symétrie centrale

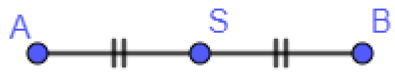


A' est l'image de A par la symétrie de centre K. K est alors le milieu du segment $[AA']$.

4.2 Exemple

Soit $S(2\,;-3)$ et $A(5\,;-9)$ dans un repère orthonormé. On appelle B le symétrique de A par la symétrie de centre S. Calculer les coordonnées de B.

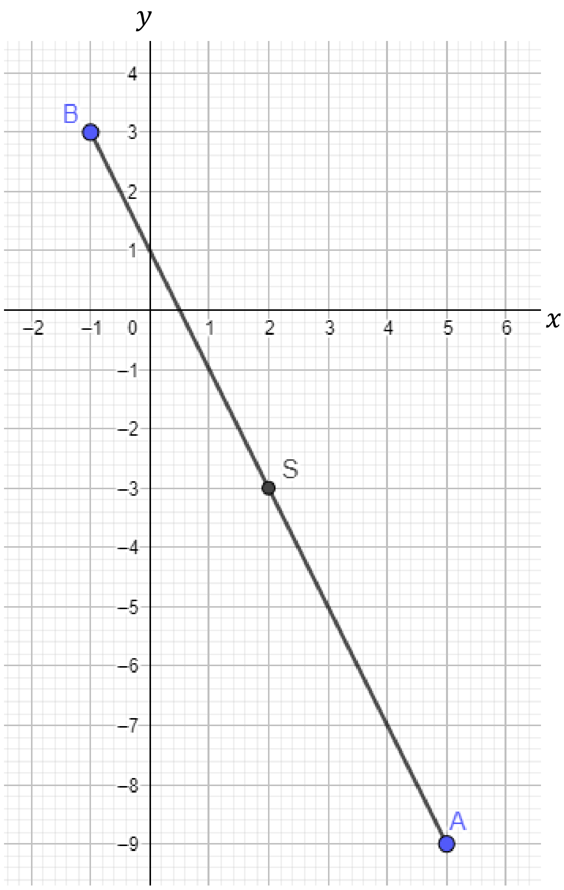
Réponse :



$S(2\,;-3)$ et $A(5\,;-9)$. Les propositions[2] suivantes sont équivalentes :

* B est le symétrique de A par la symétrie de centre S
* S est le milieu du segment $[AB]$
* $\begin{cases} x_S = \frac{x_A+x_B}{2} \\ y_S = \frac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$
* $\begin{cases} 2 = \frac{5+x_B}{2} \\ -3 = \frac{-9+y_B}{2} \end{cases}$
* $\begin{cases} 2\times 2 = 5+x_B \\ 2\times -3 = -9+y_B \end{cases}$
* $\begin{cases} 2\times 2-5 = x_B \\ 2\times -3+9 = y_B \end{cases}$
* $\begin{cases} -1 = x_B \\ 3 = y_B \end{cases}$

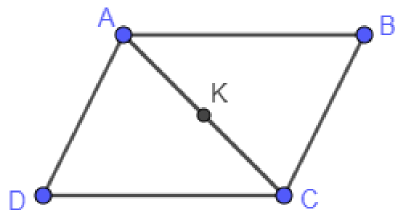
Donc $B(-1\,;3)$. On peut vérifier le résultat graphiquement :



[2] **Proposition :** Affirmation

4.3 Calculer les coordonnées du quatrième sommet d'un parallélogramme

Soit $A(2\,;-3)$, $B(6\,;5)$ et $C(9\,;-1)$ dans un repère orthonormé. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.



Ceci est un schéma de principe et non le schéma réel

Réponse :

$ABCD$ est un parallélogramme. Appelons K son centre.

Calculons les coordonnées de K.

K est le milieu du segment $[AC]$

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{2 + 9}{2} \\ y_K = \dfrac{-3 - 1}{2} \end{cases}$$

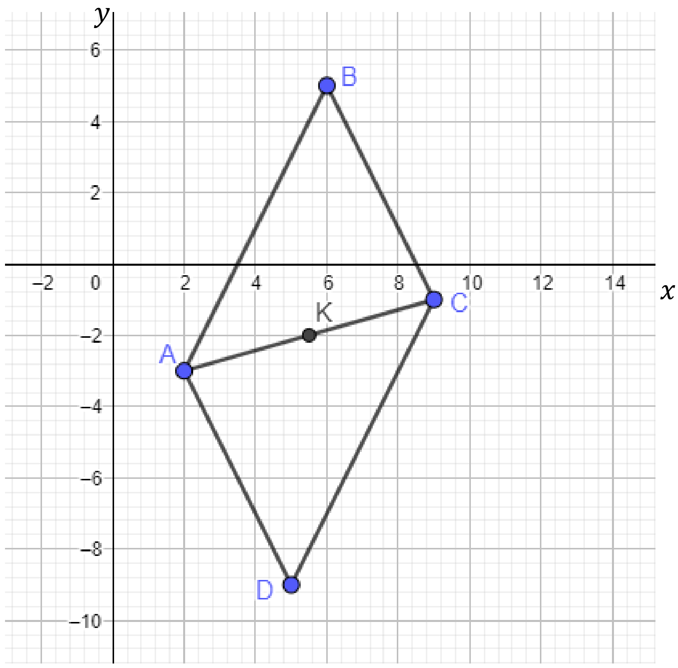
Donc $K(\frac{11}{2}\,;-2)$

Les propositions suivantes sont équivalentes :

* D est le symétrique de B par rapport à K.
* K est le milieu du segment $[BD]$
* $\begin{cases} x_K = \frac{x_B+x_D}{2} \\ y_K = \frac{y_B+y_D}{2} \end{cases}$
* $\begin{cases} \frac{11}{2} = \frac{6+x_D}{2} \\ -2 = \frac{5+y_D}{2} \end{cases}$
* $\begin{cases} 2 \times \frac{11}{2} = 6 + x_D \\ 2 \times -2 = 5 + y_D \end{cases}$
* $\begin{cases} 11 - 6 = x_D \\ -4 - 5 = y_D \end{cases}$
* $\begin{cases} 5 = x_D \\ -9 = y_D \end{cases}$

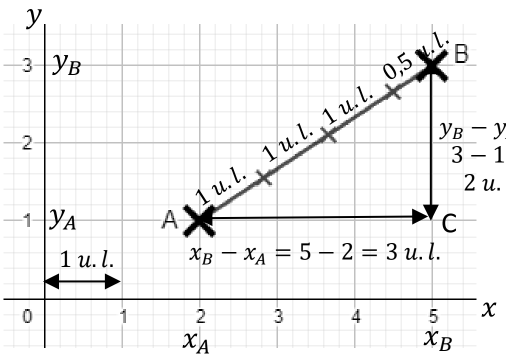
Donc $D(5\,;-9)$

On peut vérifier le résultat graphiquement :



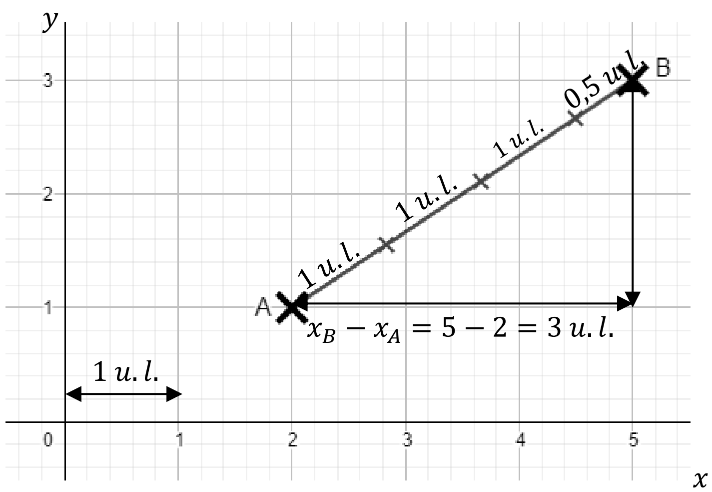
5 Calculer une distance dans un repère orthonormé

5.1 Découverte



$A(2\,;1)$ $B(5\,;3)$

dans un repère d'unité 1 cm



$A(2\,;1)$ $B(5\,;3)$

dans un repère d'unité 1,5 cm

* La longueur AB est fixe en **u**nité de **l**ongueur (u. l.) mais pas en cm.

La formule que nous cherchons permet de calculer **la distance en unité de longueur**.

Cherchons une valeur approximative de AB avec la règle.

On trouve $\boldsymbol{AB \approx 3,5\ u.l.}$ **sur les deux schémas**.

* Calculons AB en $u.l.$ grâce au théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en C.

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (3-1)^2}$

$AB = \sqrt{(3)^2 + (2)^2}$

$AB = \sqrt{9+4}$

$AB = \sqrt{13} \approx 3{,}6\ u.l.$

La distance, quelle que soit l'échelle graphique, est $\sqrt{13}$. Mais, si on connait la valeur de l'unité de longueur en cm, alors on peut calculer la longueur AB en cm :

* Sur le schéma 1 on a $AB = \sqrt{13}\ cm$ car $1\ u.l. = 1\ cm.$
* Sur le schéma 2 on a $AB = \sqrt{13} \times 1{,}5 \approx 5{,}4\ cm$ car $1\ u.l. = 1{,}5\ cm.$

5.2 Formule de la distance entre deux points

Soit deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B\ ; y_B)$ dans un repère **orthonormé**.

La distance AB est donnée par la formule :

$$\boldsymbol{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Remarque :

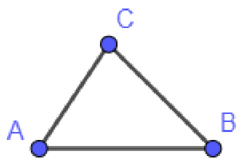
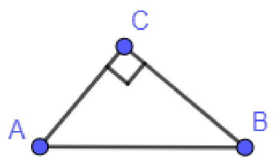
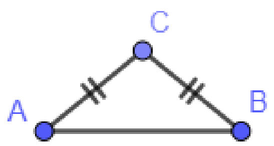
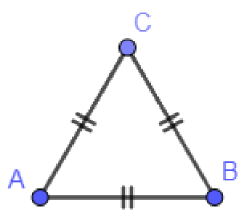
Dans le calcul $\sqrt{A+B}$, **la somme $A+B$ est prioritaire** car $\sqrt{A+B} = \sqrt{(A+B)}$.

Les parenthèses sont sous-entendues.

On rappelle que $\sqrt{A+B} \neq \sqrt{A} + \sqrt{B}$ et donc $AB \neq \sqrt{(x_B - x_A)^2} + \sqrt{(y_B - y_A)^2}$

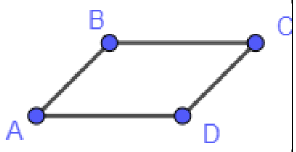
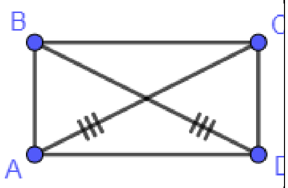
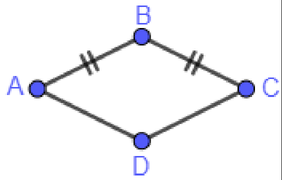
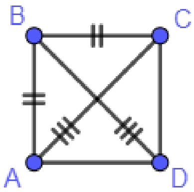
5.3 Démontrer la nature d'un triangle

- Calculer les trois côtés.
- Regarder si certaines propriétés sont vérifiées :

Triangle **quelconque**	Triangle **rectangle**	Triangle **isocèle**	Triangle **équilatéral**
 Aucune propriété particulière.	 Il a un angle droit. • Montrer que $AB^2 = AC^2 + BC^2$	 Il a deux côtés de même longueur. • Montrer que $AC = CB.$	 Il a trois côtés de même longueur. • Montrer que $AB = AC$ et $AC = CB.$

5.4 Démontrer la nature d'un parallélogramme

- Calculer deux côtés *consécutifs* et les diagonales.
- Regarder si certaines propriétés sont vérifiées :

Parallélogramme **quelconque**	**Rectangle**	**Losange**	**Carré**
			
Aucune propriété particulière.	Diagonales de même longueur. • Montrer que $AC = BD$.	Côtés *consécutifs* de même longueur. • Montrer que $AB = BC$.	A la fois rectangle et losange. • Montrer que $AC = BD$ et $AB = BC$.

Remarque :

- Si, dans un exercice **on part d'un quadrilatère quelconque**, alors il faut **d'abord démontrer que c'est un parallélogramme** en suivant la méthode vue au §3.1.
- Puis on applique la méthode ci-dessus pour démontrer que c'est un rectangle, un losange ou un carré.