Chapitre 11 : Vecteurs 2

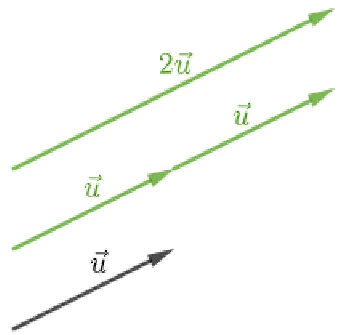
Chapitre 11 : Vecteurs 2

1 Produit d'un vecteur par un réel

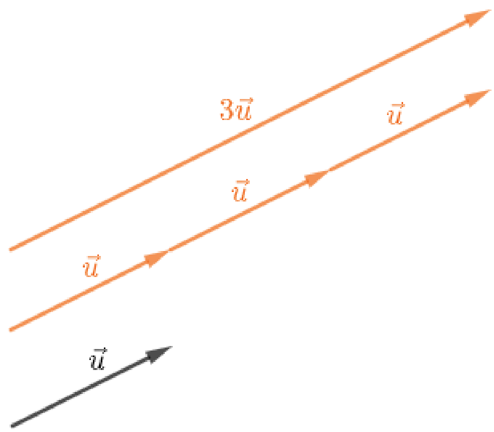
1.1 Définition

Exemples

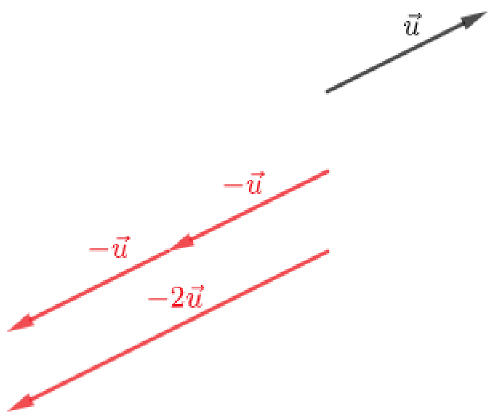
$2\vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$



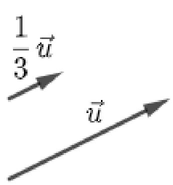
$3\vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$



$-2\vec{u} = -\vec{u} - \vec{u}$



$\frac{1}{3}\vec{u}$



Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et k un réel non nul.

Le vecteur $k\overrightarrow{AB}$:
- a même direction que $\overrightarrow{AB}$
- est de même sens que $\overrightarrow{AB}$ si $k > 0$,

  et de sens contraire si $k < 0$.
- a pour longueur kAB si $k > 0$,

  $-kAB$ si $k < 0$.

Remarque

Si $k = 0$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$

1.2 Propriétés algébriques

Soit k et k' deux réels, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$

$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

$k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

$k\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Exemples

$2(\vec{u} + \vec{w}) = 2\vec{u} + 2\vec{w}$

$3\vec{v} - 4\vec{v} = (3 - 4)\vec{v} = -\vec{v}$

$\frac{1}{2}(4\vec{u}) = \frac{4}{2}\vec{u} = 2\vec{u}$

1.3 Coordonnées du vecteur $k\vec{u}$ dans une base

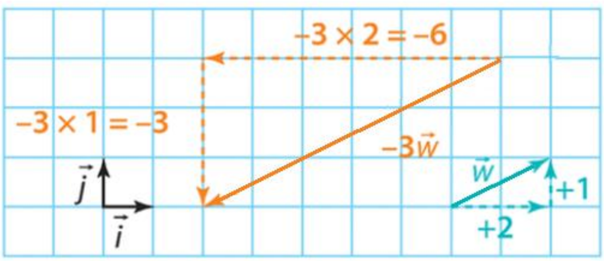
Si le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\binom{x}{y}$ alors le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\binom{kx}{ky}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exemple

Soit une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit le vecteur $\vec{w}\binom{2}{1}$.

Alors on a $-3\vec{w}\binom{-6}{-3}$.



2 Vecteurs et configurations

2.1 Vecteurs colinéaires

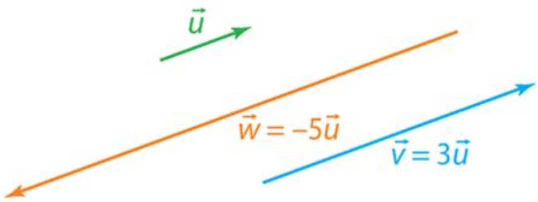
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires** s'ils ont la même direction.

Dans ce cas les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exemple

- Soit un vecteur $\vec{u}$.
- Soit le vecteur $\vec{v} = 3\vec{u}$.
- Soit le vecteur $\vec{w} = -5\vec{u}$.

Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont colinéaires.



Théorème

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

S'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Réciproquement, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Exemple

Soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Soit le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$.

On a donc $\vec{v} = -2\vec{u}$

On en conclut que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Remarque

Le vecteur nul $\vec{0}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Soit un vecteur quelconque $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

On peut écrire que $\vec{O} = k\vec{u}$ avec $k = 0$.

Ainsi on admet que le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.

2.2 Déterminant de deux vecteurs

Définition

Soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Soit le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. Le **nombre** $xy' - yx'$ est appelé **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Théorème

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont **colinéaires** si et seulement si **det(**$\boldsymbol{\vec{u}}$**,** $\vec{v}$) $= \mathbf{0}$**.**

Exemple

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires **?**

Réponse

On calcule le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

det$(\vec{u}, \vec{v}) = (4)(18) - (12)(6)$.

det$(\vec{u}, \vec{v}) = 72 - 72$.

det$(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2.3 Droites parallèles

Propriété

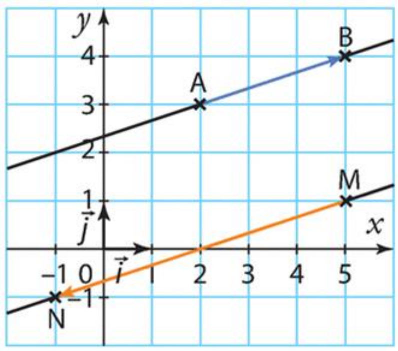
Soit quatre points distincts A, B, C et D.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles équivaut à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exemple

- Soit les points $A(2; 3), B(5; 4), M(5; 1), N(-1, -1)$.

Les droites (AB) et (MN) sont-elles parallèles ?



Réponse

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-2 \\ 4-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -1-(5) \\ -1-(1) \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

puis on calcule le déterminant det$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) = xy' - yx'$.

det$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) = (3)(-2) - (1)(-6)$.

det$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) = 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires et donc les droites (AB)et (MN) **sont parallèles**.

2.4 Points alignés

Propriété

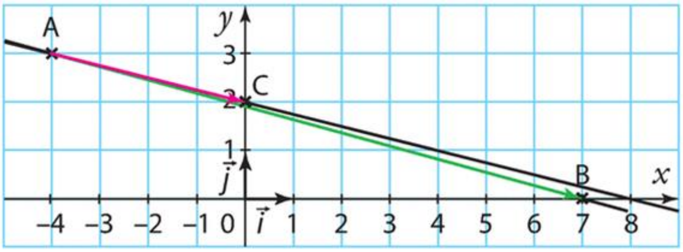
Soit trois points quelconques A, B, C.

Les points A, B et C sont alignés équivaut à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple

- Soit les points $A(-4; 3), B(7; 0), C(0; 2)$.

Les points A, B, C sont-ils alignés ?



Réponse

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7-(-4)\\0-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-(-4)\\2-(3)\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}11\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$

puis on calcule le déterminant $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = xy' - yx'$.

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (11)(-1) - (-3)(4)$.

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1$

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq \mathbf{0}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc A, B, C **ne sont pas alignés.**