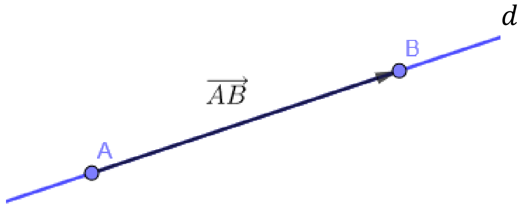
Chapitre 13 : Droites et systèmes

Chapitre 13 : Droites et systèmes

1 Vecteur directeur d'une droite

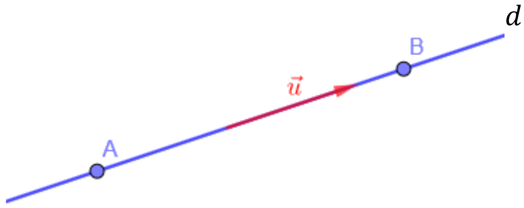
Définition

Soient A et B deux points d'une droite d. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un **vecteur directeur** de d.



Remarque

Tout autre vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ (sauf le vecteur nul) est aussi un vecteur directeur de d



Exemple

Soient $A(-2\,;4)$ et $B(6\,;\;2)$. Déterminer un vecteur directeur de la droite (AB).

Réponse

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6-(-2) \\ 2-4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Un autre vecteur directeur est par exemple $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2 Équation cartésienne d'une droite

2.1 Équation cartésienne générale d'une droite

Toute droite du plan a une équation de la forme

$$\boldsymbol{ax+by+c=0}$$

où a, b, c sont trois réels.

Exemple

La droite d_1 a pour équation $-2x + y + 3 = 0$

On reconnait une équation cartésienne générale de droite dans le plan avec $\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$

Propriété

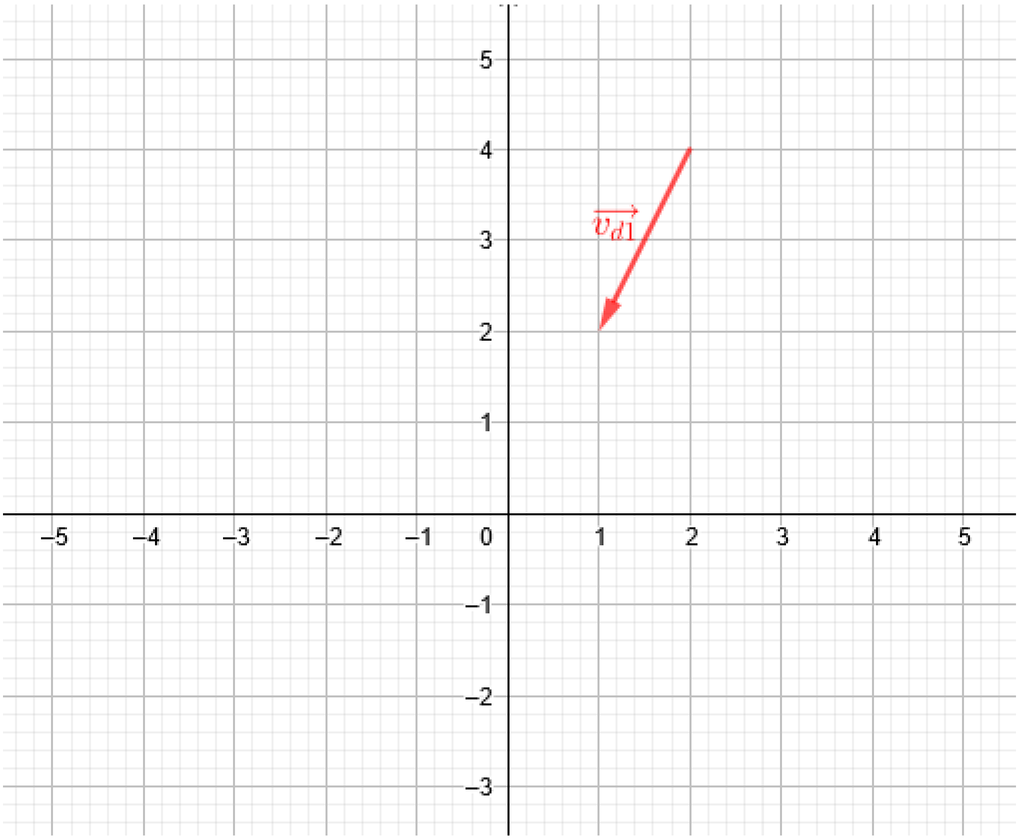
Lorsqu'on a une équation cartésienne générale de droite, on peut en déduire immédiatement les coordonnées d'un vecteur directeur par la formule :

$$\overrightarrow{v_{d1}}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

Exemple

La droite d_1 a pour équation $-2x + y + 3 = 0$ a pour vecteur directeur

$$\overrightarrow{v_{d1}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



2.2 Condition d'appartenance d'un point à une droite

Un point M de coordonnées $(x\,;y)$ appartient à une droite d_1 d'équation $ax+by+c=0$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation. Autrement dit l'égalité $ax+by+c=0$ est vraie lorsqu'on remplace x et y par les valeurs des coordonnées.

Exemple 1

Le point $R(4\,;3)$ est-il situé sur la droite d_1 d'équation $-2x+y+3=0$?

On remplace x et y par 4 et 3.

$$-2(4)+3+3=-2$$

$$-2(4)+3+3\neq 0$$

Donc le point R n'est pas sur d_1.

Exemple 2

Le point $S(1\,;-1)$ est-il situé sur la droite d_1 d'équation $-2x+y+3=0$?

On remplace x et y par 1 et -1. $\quad -2(1)-1+3=0$

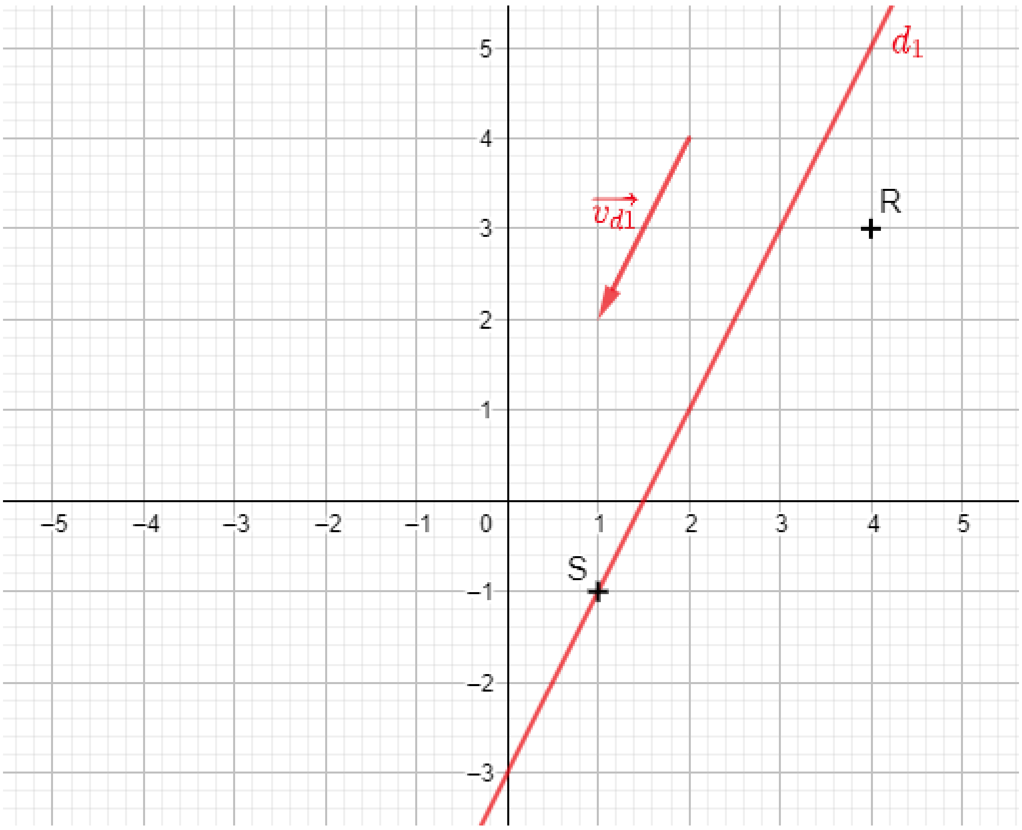
Donc le point S est sur d_1.

Remarque

La connaissance de $S(1\,;-1)$

et de $\overrightarrow{v_{d1}}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

permet de tracer la droite d_1



2.3 Calculer une équation générale de la droite à partir d'un vecteur directeur et d'un point de la droite

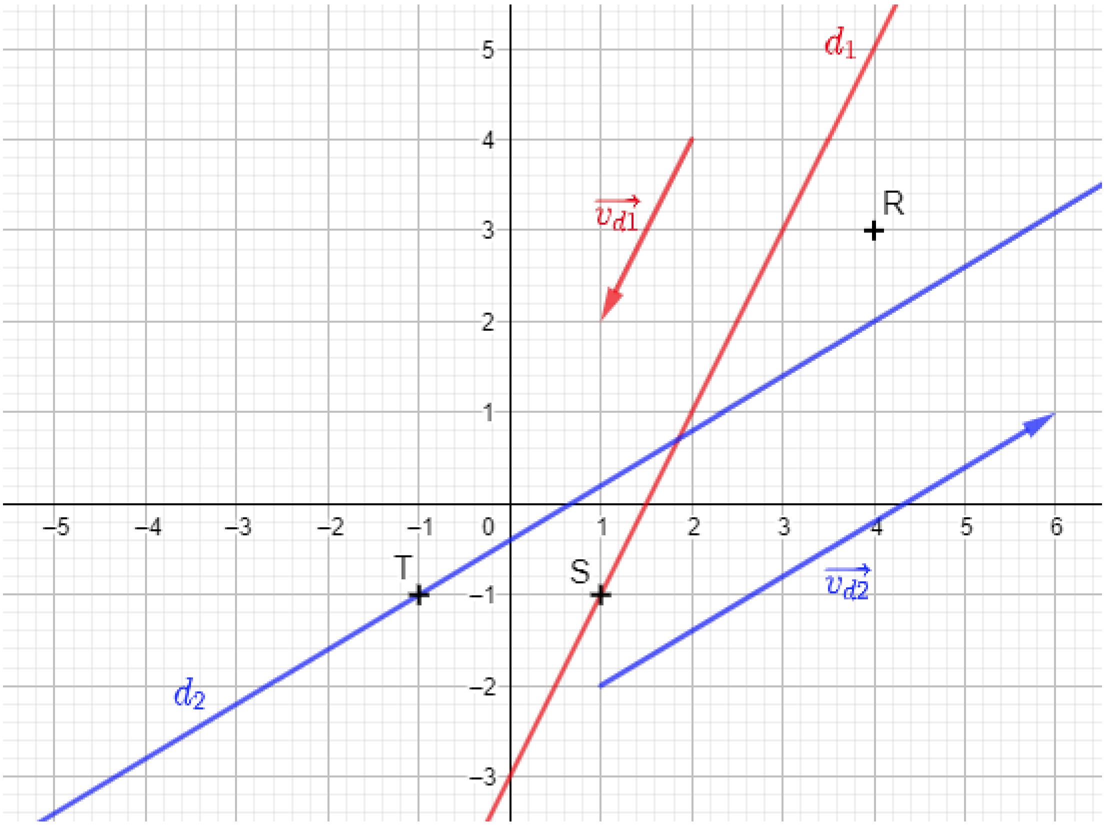
Exemple :

Soit une droite d_2 de vecteur directeur

$$\overrightarrow{v_{d2}}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$

et passant par le point $T(-1\,;\,-1)$

Déterminer l'équation cartésienne générale de d_2.



Réponse

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $M(x\,;y) \in d_2$
- $\overrightarrow{TM}$ et $\overrightarrow{v_{d2}}$ sont colinéaires
- $det\left(\overrightarrow{TM}, \overrightarrow{v_{d2}}\right) = 0$
- $(x+1) \times 3 - (y+1) \times 5 = 0$
- $3x + 3 - 5y - 5 = 0$
- $\mathbf{3x - 5y - 2 = 0}$

$$\boxed{\begin{matrix}\overrightarrow{TM}\begin{pmatrix}x-(-1)\\y-(-1)\end{pmatrix}\\[1em]\overrightarrow{TM}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\end{pmatrix}\end{matrix}}$$

3 Équation réduite d'une droite

3.1 Équation réduite d'une droite non verticale et équation d'une droite verticale

Une équation réduite d'une droite dans le plan contient moins de coefficients réels qu'une équation cartésienne générale qui a trois coefficients a, b, c.

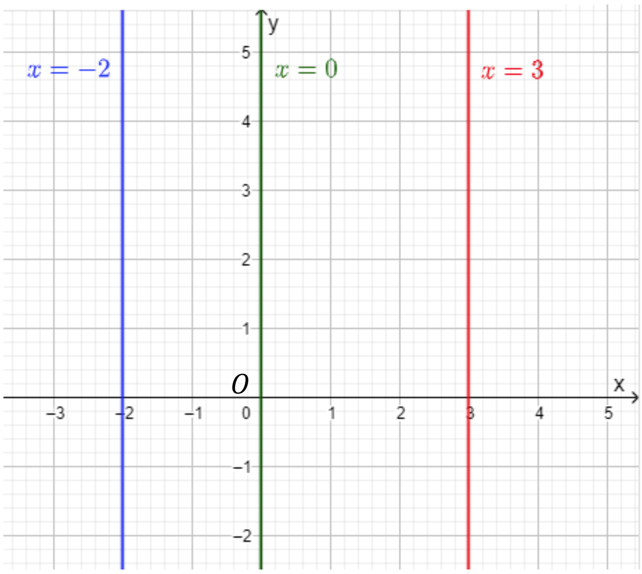
Une équation réduite contient seulement deux coefficients souvent notés m, p.

Toute droite *non verticale* a une équation réduite de la forme $$\boldsymbol{y = mx + p}$$

- Le réel m est appelé **coefficient directeur** de la droite
- Le réel p est appelé **l'ordonnée à l'origine** de la droite.

<u>Cas n°1</u> La droite n'a pas d'équation réduite

Si la droite est verticale, alors elle n'a pas d'équation réduite**. L'équation d'une droite verticale est de la forme $\boldsymbol{x = constante}$.** Par exemple $x = -2$; $x = 0$; $x = 3$ sont des équations de droites verticales, c'est à dire parallèles à l'axe(Oy) des ordonnées.



Droites n'ayant pas d'équation réduite

<u>Cas n°2</u> La droite a une équation réduite

Quelle est l'équation réduite de d_2 qui a comme équation cartésienne générale $3x - 5y - 2 = 0$?

$3x - 2 = 5y$

$5y = 3x - 2$

$\boldsymbol{y = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}}$

Ainsi le coefficient directeur de la droite d_2 est $m = \frac{3}{5}$ et son ordonnée à l'origine est $p = -\frac{2}{5}$.

Remarques

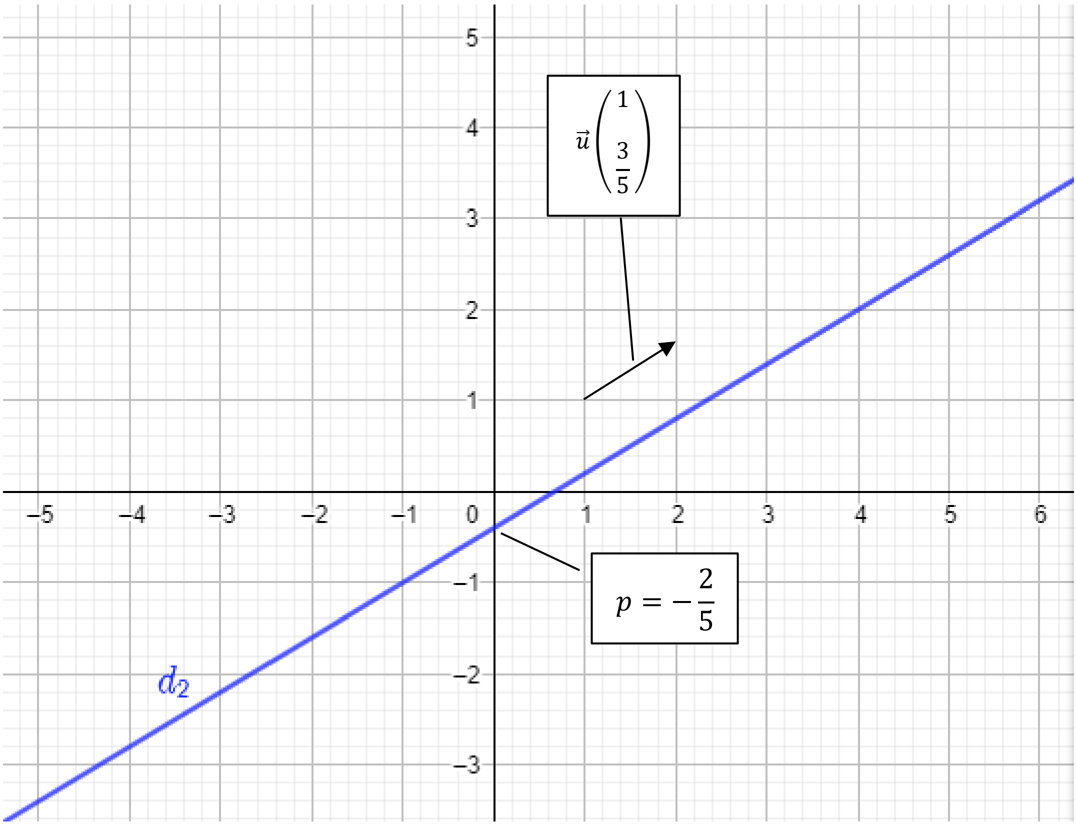
- m et p peuvent être lus facilement sur le graphique (voir le paragraphe suivant).
- Le vecteur de coordonnées $\binom{1}{m}$ est un vecteur directeur de la droite.
- Le point de coordonnées $(0\,; p)$ est un point de la droite. C'est le point où la droite coupe l'axe des ordonnées. C'est pourquoi on appelle p l'ordonnée à l'origine.

3.2 Lecture graphique d'une équation réduite de droite

Exemple avec $\boldsymbol{d_2 : \ y = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}}$

Le coefficient directeur de la droite d_2 est $m = \frac{3}{5}$ donc un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

Son ordonnée à l'origine est $p = -\frac{2}{5}$ donc d_2 coupe l'axe des ordonnées au point $(0 \,;\, -\frac{2}{5})$.



3.3 Signe du coefficient directeur et orientation de la droite

Étant donné que le vecteur directeur qui a pour abscisse 1 a pour ordonnée le coefficient directeur m, on peut en déduire que :

Si $m > 0$ alors la droite "monte".

Si $m < 0$ alors la droite "descend".

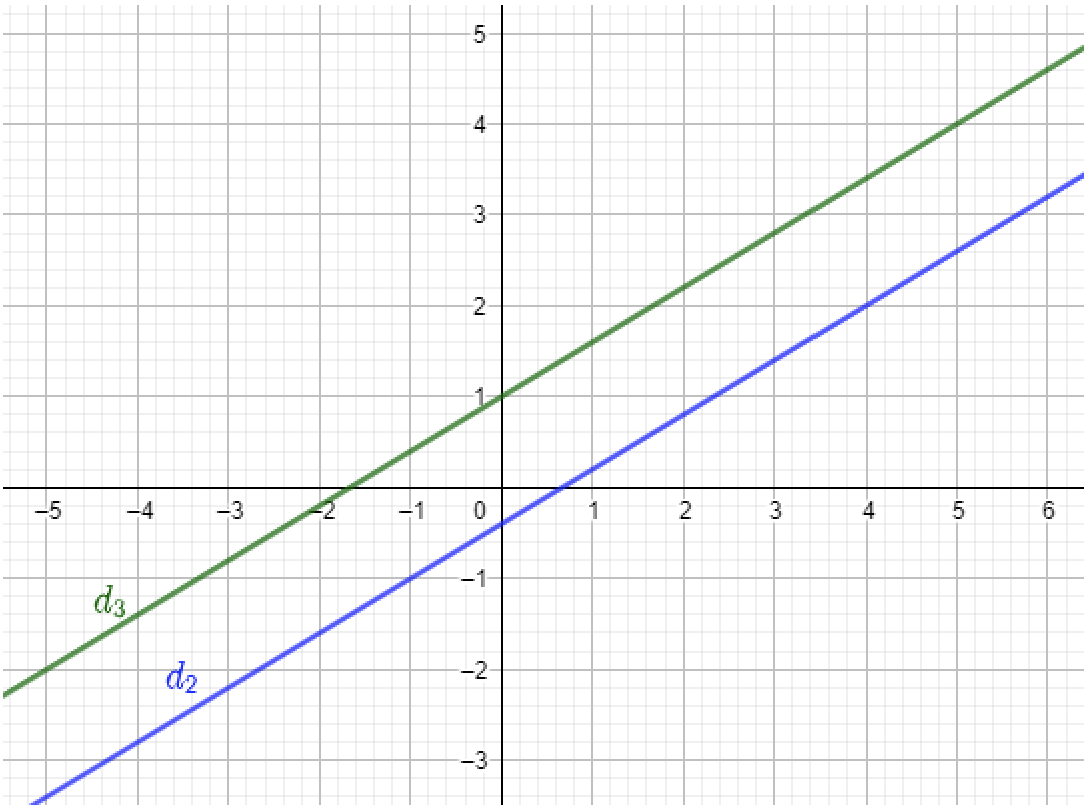
Si $m = 0$ alors la droite est horizontale (c'est à dire parallèle à l'axe des abscisses).

3.4 Droites parallèles

Deux droites non verticales sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Exemple

Les droites d_2 d'équation $y = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}$ et d_3 d'équation $y = \frac{3}{5}x + 1$ ont le même coefficient directeur $\frac{3}{5}$ donc elles sont parallèles.



3.5 Coefficient directeur ou pente

Le coefficient directeur est aussi appelé **pente** de la droite.

Le coefficient directeur ou pente de la droite (AB) avec $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ est donné par :

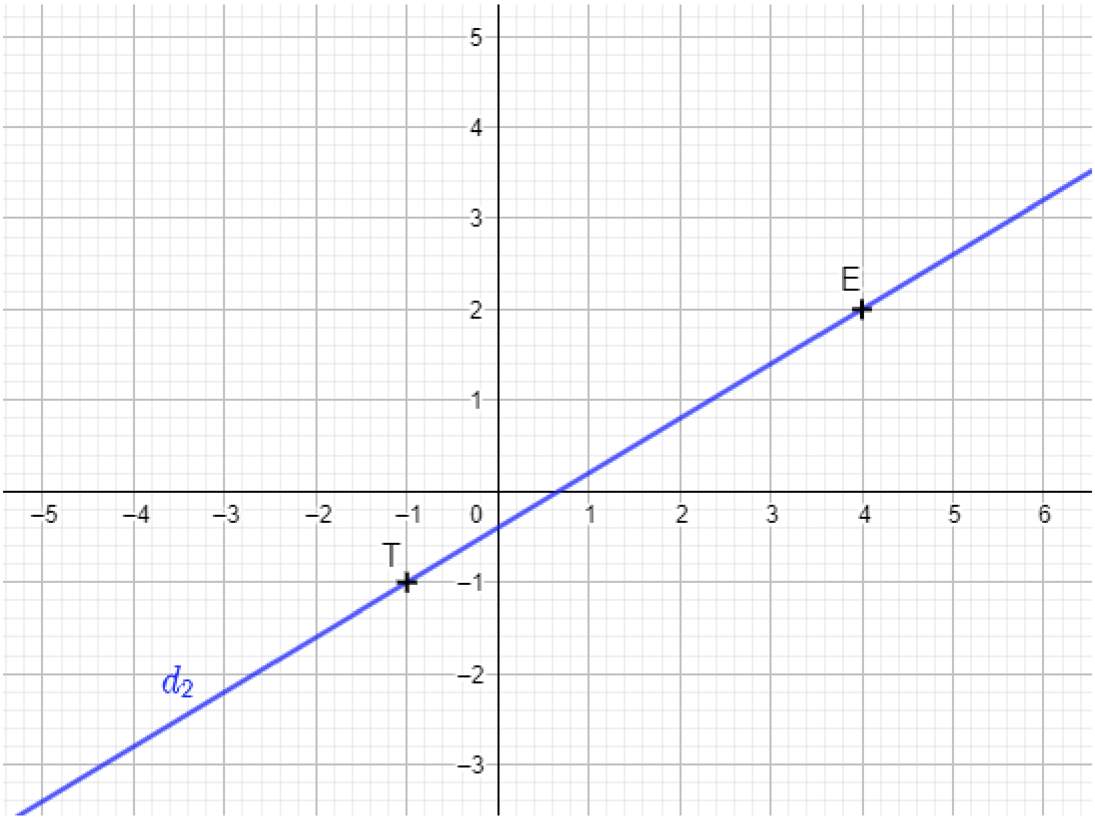
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Remarque

La fraction $\frac{Différence\ des\ y}{Différence\ des\ x}$ est parfois notée avec la lettre grecque "delta majuscule" Δ

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

3.6 Calculer une équation réduite de la droite à partir de deux points de la droite



Déterminer l'équation réduite de la droite d_2 passant par les points $T(-1\,;\,-1)$ et $E(4\,;\,2)$

Réponse

- Première étape : calcul du coefficient directeur m.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{2-(-1)}{4-(-1)}$$

$$\boldsymbol{m = \frac{3}{5}}$$

Donc d_2 a une équation réduite de la forme $y = \frac{3}{5}x + p$

- Deuxième étape : calcul de l'ordonnée à l'origine p.

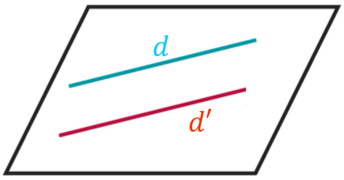
On remplace dans l'équation x et y par les coordonnées d'un point de la droite. Choisissons $T(-1\,;\,-1)$.

On obtient $-1 = \frac{3}{5} \times -1 + p$. Donc $p = -1 + \frac{3}{5}$ soit $\boldsymbol{p = -\frac{2}{5}}$ ce qui donne $\boldsymbol{y = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}}$.

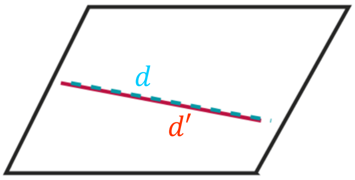
4 Positions relatives de deux droites

4.1 Toutes les positions relatives possibles de deux droites dans le plan

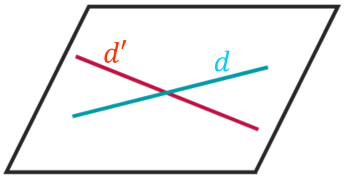
Dans le plan, deux droites d et d' peuvent être :



Strictement parallèles



Parallèles confondues



Sécantes

4.2 Droites parallèles avec équations réduites

Soit la droite d d'équation réduite $y = mx + p$.

Soit la droite d' d'équation réduite $y = m'x + p'$.

- d et d' sont parallèles si et seulement si $m = m'$.
- Si de plus $p = p'$ alors d et d' sont parallèles confondues.

4.3 Droites parallèles avec équations cartésiennes générales

On a vu que le vecteur $\vec{v}\binom{1}{m}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $y = mx + p$.

Considérons la droite d d'équation générale $ax + by + c = 0$. Le lien avec l'équation réduite se fait par :

$$by = -ax - c$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Ainsi le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{a}{b}\end{pmatrix}$

Mais tout vecteur colinéaire est aussi un vecteur directeur. En particulier $-b\vec{v}$ c'est à dire le vecteur de coordonnées $\overrightarrow{\boldsymbol{v_1}}\binom{-\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$ est un vecteur directeur de la droite d.

De même le vecteur de coordonnées $\overrightarrow{\boldsymbol{v_2}}\begin{pmatrix}-\boldsymbol{b}'\\\boldsymbol{a}'\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d' d'équation générale $a'x + b'y + c' = 0$.

Les droites d et d' sont parallèles si et seulement si $det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = 0$

$$-ba' + ab' = 0$$

5 Résolution de systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

5.1 Système de deux équations linéaires à deux inconnues

Définition

On dit qu'un couple $(x\,;y)$ vérifie le système suivant de deux équations linéaires à deux inconnues :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

si ce couple $(x\,;y)$ vérifie les deux équations à la fois.

Exemple

$\begin{cases} -2x + y + 3 = 0 \\ 3x - 5y - 2 = 0 \end{cases}$ est un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

Les inconnues sont x et y et les nombres -2 ; 1 ; 3 ; 3 ; -5 ; -2 sont les coefficients du système.

Résoudre le système, c'est trouver toutes les valeurs qu'il faut donner à chaque inconnue en même temps pour que les deux égalités soient vraies.

Dans cet exemple, toutes les valeurs possibles pour le couple $(x\,;y)$ se résume à l'unique couple solution $\left(\frac{13}{7}; \frac{5}{7}\right)$.

Vérifions en remplaçant x et y par leurs valeurs :

$$\begin{cases} -2\left(\frac{13}{7}\right) + \left(\frac{5}{7}\right) + 3 = -\frac{26}{7} + \frac{5}{7} + 3 \\ 3\left(\frac{13}{7}\right) - 5\left(\frac{5}{7}\right) - 2 = \frac{39}{7} - \frac{25}{7} - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\left(\frac{13}{7}\right) + \left(\frac{5}{7}\right) + 3 = -\frac{26}{7} + \frac{5}{7} + \frac{21}{7} \\ 3\left(\frac{13}{7}\right) - 5\left(\frac{5}{7}\right) - 2 = \frac{39}{7} - \frac{25}{7} - \frac{14}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\left(\frac{13}{7}\right) + \left(\frac{5}{7}\right) + 3 = 0 \\ 3\left(\frac{13}{7}\right) - 5\left(\frac{5}{7}\right) - 2 = 0 \end{cases}$$

Conclusion : le couple $\left(\frac{13}{7}; \frac{5}{7}\right)$ est une solution du système soit approximativement $(\,1{,}86\,;\ 0{,}71)$.

Questions

Comment trouver le couple solution à partir du système ? Comment peut-on être certain que c'est le seul couple solution ?

Réponse : En résolvant le système. Il existe deux méthodes : par substitution et par combinaison

5.2 Résolution d'un système par substitution

Substituer signifie *remplacer*.

Voici la méthode :

- On isole une inconnue (x ou y) dans l'une des deux équations.
- On remplace cette inconnue dans l'autre équation.
- On a ainsi obtenu une équation *à une seule inconnue qu'il* est donc possible de résoudre.
- On termine en reportant la valeur de cette inconnue dans l'autre équation.

Exemple

Résoudre par substitution le système

$$\begin{cases} -2x + y + 3 = 0 \\ 3x - 5y - 2 = 0 \end{cases}$$

- On isole y dans la 1ère équation

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x - 5y - 2 = 0 \end{cases}$$

- On remplace y par ce à quoi il est égal dans la 2e équation

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x - 5(2x - 3) - 2 = 0 \end{cases}$$

- On résout la 2e équation

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x - 10x + 15 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ -7x + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 13 = 7x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ \dfrac{13}{7} = x \end{cases}$$

- On reporte la valeur de x qui est $\frac{13}{7}$ dans l'autre équation

$$\begin{cases} y = 2\left(\dfrac{13}{7}\right) - 3 \\ \dfrac{13}{7} = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{26}{7} - 3 \\ \dfrac{13}{7} = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{26}{7} - \dfrac{21}{7} \\ \dfrac{13}{7} = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{5}{7} \\ x = \dfrac{13}{7} \end{cases}$$

Ainsi il existe un unique couple solution à ce système.

Son ensemble de solutions est $S = \left\{ \left(\frac{13}{7} ; \frac{5}{7} \right) \right\}$.

Attention à mettre dans le bon ordre x et y dans le couple solution !

5.3 Résolution d'un système par combinaison linéaire

Combiner linéairement signifie *additionner membre à membre les deux équations avec possibilité de multiplier les membres d'une même équation par un même réel.* Un exemple est donné ci-dessous.

Voici la méthode :

- On multiplie les deux membres de la 1ère équation par un même réel.
- On multiplie les deux membres de la 2e équation par un même réel.
- On additionne les deux équations membre à membre ce qui permet d'éliminer une des inconnues.
- On a ainsi obtenu une équation *à une seule inconnue qu'il* est donc possible de résoudre.
- On termine en reportant la valeur de cette inconnue dans l'autre équation.

Exemple

Résoudre par combinaison le système. Pour plus de facilité, on nomme L_1 la ligne 1 et L_2 la ligne 2.

$$\begin{cases} -2x + y + 3 = 0 & (L_1) \\ 3x - 5y - 2 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

- Par exemple on décide d'éliminer y. Pour cela on voit qu'il faut multiplier les deux membres de la 1ère équation par 5 ce qui amènera $5y$. Ensuite on additionnera les deux lignes ce qui fera $5y - 5y$ et éliminera donc y

$$\begin{cases} -10x + 5y + 15 = 0 & (5L_1) \\ 3x - 5y - 2 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10x + 5y + 15 = 0 & (5L_1) \\ -10x + 5y + 15 + 3x - 5y - 2 = 0 & (5L_1 + L_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10x + 5y + 15 = 0 \\ -7x + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10x + 5y + 15 = 0 \\ 13 = 7x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10x + 5y + 15 = 0 \\ \dfrac{13}{7} = x \end{cases}$$

Puis on remplace x par sa valeur dans la 1ère équation

$$\begin{cases} -10\left(\dfrac{13}{7}\right) + 5y + 15 = 0 \\ \dfrac{13}{7} = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{130}{7} + 5y + 15 = 0 \\ \dfrac{13}{7} = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y = \dfrac{130}{7} - 15 \\ \dfrac{13}{7} = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y = \dfrac{130}{7} - \dfrac{105}{7} \\ \dfrac{13}{7} = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y = \dfrac{25}{7} \\ \dfrac{13}{7} = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{5}{7} \\ \dfrac{13}{7} = x \end{cases}$$

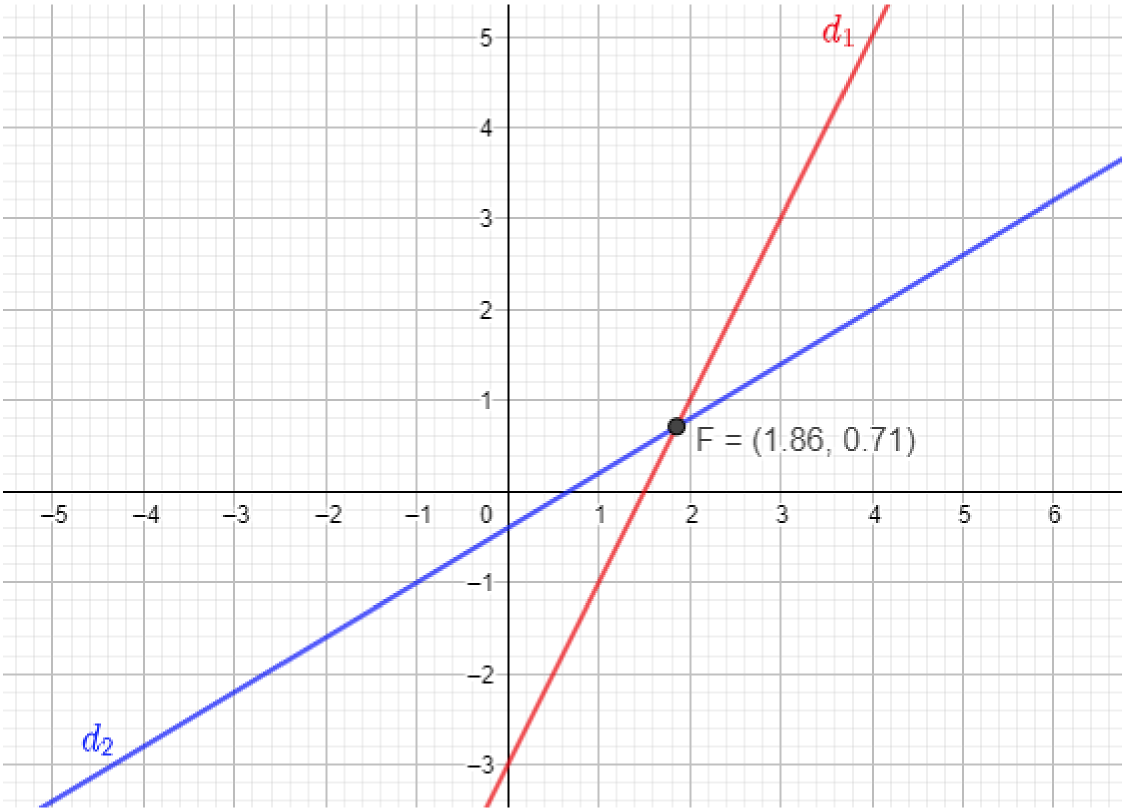
L'ensemble des solutions est $S = \left\{ \left(\frac{13}{7} ; \frac{5}{7} \right) \right\}$.

Remarque

Le couple de coordonnées $\left(\frac{13}{7} ; \frac{5}{7} \right)$ vérifie aussi bien la première équation $-2x + y + 3 = 0$ que la deuxième équation $3x - 5y - 2 = 0$. Nommons F le point de coordonnées $F(\frac{13}{7} ; \frac{5}{7})$.

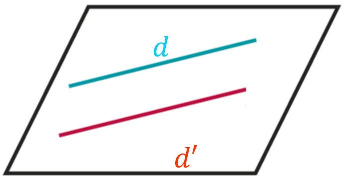
Si d_1 est la droite ayant pour équation la ligne (L_1) $-2x + y + 3 = 0$

et si d_2 est la droite ayant pour équation $(L_2)\quad 3x - 5y - 2 = 0$ alors le point $F(\frac{13}{7}\,;\frac{5}{7})$ ou approximativement $F(1{,}86\,;0{,}71)$ est le point d'intersection des droites d_1 et d_2.



5.4 Les différents types d'ensembles de solutions à un système d'équations linéaires

- Les différents types correspondent aux trois cas de positions relatives de droites :



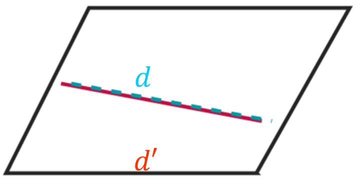
Strictement parallèles

Le système :

$$\begin{cases} Equation\ de\ d \\ Equation\ de\ d' \end{cases}$$

n'a pas de solution.
(aucun point commun aux deux droites).

$$S = \emptyset$$



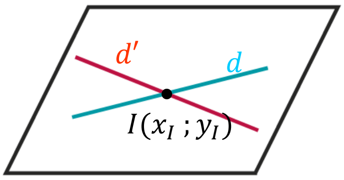
Parallèles confondues

Le système :

$$\begin{cases} Equation\ de\ d \\ Equation\ de\ d' \end{cases}$$

a une infinité de solutions.
(les coordonnées de tous les points de la droite d qui sont donc aussi sur la droite d').

$$S = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2\ tels\ que\ Equation\ de\ d\}$$



Sécantes

Le système :

$$\begin{cases} Equation\ de\ d \\ Equation\ de\ d' \end{cases}$$

a une unique solution.
(les coordonnées du point I d'intersection de d et d').

$$S = \{(x_I\,;y_I)\}$$

- En résumé, il peut y avoir soit **0 solution** soit **une infinité** de solutions soit **une seule**.